Wojciech Patryas, *Elementy logiki dla prawników*, Ars boni et aequi, Poznań 1994, s. 7-70 (Rozdział I *Rachunek zdań* i II *Wprowadzenie do rachunku predykatów*).

I. RACHUNEK ZDAŃ

1. Zdanie w sensie logicznym

O tym, co to jest zdanie, dowiedzieliśmy się już w szkole podstawowej. Wiemy, że wyrażenie „Poznań leży nad Wartą" jest zdaniem. Także wyrażenia: „Marcin studiuje prawo", „Czy delfiny są rybami?", „Przynieś na jutrzejszy wykład notatki z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa", „Byłem tam" są zdaniami. Pewne z nich nazywamy zdaniami oznajmującymi, inne pytającymi, jeszcze inne rozkazującymi. Wszystkie one są zdaniami w sensie gramatycznym.

Jednakże w logice pojmuje się zdania nieco inaczej. Otóż **zdaniem w sensie logicznym** jest takie wyrażenie, które jest prawdziwe albo fałszywe. Wyrażenie jest prawdziwe, gdy opisuje rzeczywistość tak, jak się ona ma. Na przykład wyrażenie „Poznań leży nad Wartą" jest prawdziwe, bo miasto Poznań rzeczywiście leży nad rzeką Wartą. Prawdziwe są też wyrażenia „2 + 2 = 4", „Polska znajduje się w Europie", czy „Wróble są ptakami". Natomiast wyrażenie jest fałszywe, gdy opisuje rzeczywistość nie tak, jak się ona ma. Na przykład wyrażenie „Pingwiny potrafią latać" jest fałszywe, bo ptaki te nie mają zdolności latania. Fałszywe są też wyrażenia: „Najwyższy Polak mierzy ponad 3 m", „Paryż jest stolicą Włoch", czy „Październik jest cieplejszy od lipca". Należy podkreślić, że wyrażenia fałszywe także opisują rzeczywistość, lecz nie tak jak się ona ma. Ponieważ prawdę oraz fałsz nazywamy wartościami logicznymi, dlatego możemy powiedzieć, że zdaniem w sensie logicznym jest takie wyrażenie, które ma wartość logiczna.

Zauważmy, że wyrażenie „Czy delfiny są rybami?" nie jest zdaniem w sensie logicznym, bo nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe, czyli nie ma wartości logicznej. Otóż żadne pytanie nie **[7/8]** jest zdaniem w sensie logicznym. Należy jednak dodać, że niekiedy również i pytania przekazują pewne informacje o rzeczywistości. Gdy słyszymy, jak ktoś pyta „Dlaczego Tomek przestał palić papierosy?", to domyślamy się, że Tomek przedtem palił papierosy, a teraz już ich nie pali. Niemniej jednak samo to pytanie nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Natomiast ma określoną wartość logiczną, a wiec jest zdaniem w sensie logicznym, wyrażenie następujące „Piotr zapytał Tomka, dlaczego ten przestał palić papierosy". Jeżeli bowiem rzeczywiście Piotr zadał takie pytanie Tomkowi, to powyższe wyrażenie jest prawdziwe. Jeśli zaś w istocie Piotr takiego pytania Tomkowi nie zadał, to wyrażenie to jest fałszywe.

Także wyrażenie „Przynieś na jutrzejszy wykład notatki z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa" nie jest zdaniem w sensie logicznym, bo nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Podobnie jak pytania, również i rozkazy czy normy nie są zdaniami w sensie logicznym. Trzeba jednak zaznaczyć, że niekiedy i te wyrażenia bywają przekaźnikami informacji o rzeczywistości. Gdy ktoś rozkazuje Pawłowi „Podaj mi gazetę ze stołu", to słysząc to domyślamy się, że na stole leży gazeta. Jednakże sam ten rozkaz nie jest ani prawdziwy, ani fałszywy. Natomiast ma określoną wartość logiczną, a więc jest zdaniem w sensie logicznym, wyrażenie następujące „Andrzej rozkazał Pawłowi, aby ten podał mu gazetę ze stołu". Jeśli bowiem istotnie Andrzej wydał taki rozkaz Pawłowi, to powyższe wyrażenie jest prawdziwe. Jeśli zaś w rzeczywistości Andrzej takiego rozkazu Pawłowi nie wydał, to wyrażenie to jest fałszywe.

Nie jest też zdaniem w sensie logicznym wyrażenie „Byłem tam". Wyrażenie to nie wskazuje bowiem kto, gdzie i kiedy był obecny. Może ono jednak funkcjonować tak jak zdanie w sensie logicznym, gdy wypowiadający je i słuchający zdają sobie sprawę ze stosownych jego uzupełnień. Gdy Antek mówi do Franka „Byłem tam", a obaj wiedzą, że chodzi o stadion Lecha w dniu 14. III. 1993 r., gdy odbywał się na tymże stadionie mecz Lecha z drużyną przyjezdną, to wyrażenie użyte przez Antka funkcjonuje tak jak zdanie „14. III. 1993 r. Antek był na stadionie Lecha, gdy drużyna Lecha rozgrywała mecz z drużyną przyjezdną". Wyrażenie „Byłem tam" funkcjonuje więc niekiedy tak jak zdanie w sensie logicznym, chociaż nim, w gruncie rzeczy, nie jest. Wyrażeniami takiego typu często posługujemy się w mowie **[8/9]** potocznej. Również i w niniejszej pracy będziemy się nimi częstokroć posługiwali, traktując je jako zdania w sensie logicznym.

Należy podkreślić, że wartość logiczna zdania jest jego właściwością obiektywną. Nie zależy ona od tego czy trafnie rozpoznają ją ci, którzy używają danego zdania. Wyrażenie „Wieloryby są ssakami" jest i było prawdziwe również wtedy, gdy ludzie błędnie uważali wieloryby za pewien gatunek ryb. Podobnie wyrażenie „W promieniu miliarda lat świetlnych od Ziemi znajduje się takie ciało niebieskie, na którym występują przynajmniej zaczątki życia" ma jakąś wartość logiczną, chociaż nie wiemy jeszcze, jaka ona jest. Także zdanie „Dnia 10 lutego 2050 r. w południe na Starym Rynku w Poznaniu temperatura będzie wynosić -2°C" ma wartość logiczną, której jeszcze nie znamy. Wyrażenie to ma już wartość logiczną nawet gdyby przyjąć, że temperatura w owym dniu nie jest jeszcze zdeterminowana przez aktualnie występujące zjawiska meteorologiczno-geofizyczne.

Jak widać, tylko niektóre zdania w sensie gramatycznym są zdaniami w sensie logicznym. Odtąd przedmiotem naszych zainteresowań będą jedynie te zdania, które są zdaniami w sensie logicznym. Stąd też ilekroć będzie dalej mowa o zdaniach, będzie chodziło wyłącznie o zdania w sensie logicznym.

2. Zmienne zdaniowe

W dalszych rozważaniach będziemy się posługiwali zmiennymi zdaniowymi. **Zmienną zdaniową** jest takie wyrażenie, za które wolno wstawiać dowolne zdanie. Jako zmiennych zdaniowych używa się małych liter: „p", „q", „r", „s", „t", „p_1", „p_2", „p_3", „q_1", „q_2", „p'", „p''", „q'" itd. W wyrażeniu „p lub q" za zmienną „p" wolno wstawić na przykład zdanie „Kasia studiuje prawo", zaś za zmienną „q" zdanie „Basia studiuje prawo", otrzymując w efekcie zdanie „Kasia studiuje prawo lub Basia studiuje prawo". Podobnie w wyrażeniu „Jeżeli Krzyś myśli, że p, to Krzyś wie, że p" za zmienną zdaniową „p" wolno wstawić **[9/10]** zdanie „Rysy są najwyższym szczytem w Polsce", uzyskując zdanie „Jeżeli Krzyś myśli, że Rysy są najwyższym szczytem w Polsce, to Krzyś wie, że Rysy są najwyższym szczytem w Polsce". Jak widać za zmienną zdaniową wolno wstawiać dowolne zdanie.

Jeżeli w danym wyrażeniu występuje kilka różnych zmiennych zdaniowych, to za każdą z nich wolno wstawiać dowolne zdanie, a wiec i zdanie różne od tych, które wstawia się za pozostałe zmienne. Na przykład w wyrażeniu „p lub q" za „p" wstawiliśmy zdanie „Kasia studiuje prawo", a za „q" wstawiliśmy zdanie „Basia studiuje prawo". Ponieważ jednak za daną zmienną wolno wstawiać dowolne zdanie, dlatego za różne zmienne można też wstawić to samo zdanie. Na przykład, za występującą w wyrażeniu „p lub q" zmienną „p" jak i za występującą w nim zmienną „q" wolno wstawić to samo zdanie. Niech to będzie zdanie „Śrem leży nad Wartą". Wówczas wyjściowe wyrażenie przekształci się w zdanie „Śrem leży nad Wartą lub Śrem leży nad Wartą".

O ile za różne zmienne zdaniowe wolno wstawiać to samo zdanie, o tyle za jedną zmienną występującą w danym wyrażeniu kilkakrotnie nie wolno w różnych miejscach wstawiać różnych zdań. Wstawienie musi bowiem być konsekwentne, co znaczy, że za tę samą zmienną występującą w danym wyrażeniu kilkakrotnie należy wszędzie wstawić to samo zdanie. Gdy więc za zmienną „p" występującą w wyrażeniu „Jeżeli Krzyś myśli, że p, to Krzyś wie, że p" wstawia się zdanie „Jaskółki są ptakami", to należy je wstawić w każdym miejscu, w którym występuje ta zmienna. Konsekwentne jest więc wstawienie prowadzące do zdania „Jeżeli Krzyś myśli, że jaskółki są ptakami to Krzyś wie, że jaskółki są ptakami". Natomiast niekonsekwentne, a więc niepoprawne byłoby wstawienie prowadzące do zdania „Jeżeli Krzyś myśli, że jaskółki są ptakami to Krzyś wie, że niedźwiedzie są ssakami", bo za tę samą zmienną raz wstawiono by zdanie „Jaskółki są ptakami", a raz zdanie „Niedźwiedzie są ssakami". Jeszcze raz podkreślmy, że za zmienne zdaniowe wolno wstawiać tylko zdania. Niepoprawne byłoby więc przekształcenie wyrażenia „p lub q" w wyrażenie „Agnieszka lub Michał". Takie przekształcenie byłoby bowiem efektem wstawienia za zmienne „p" i „q" wyrażeń „Agnieszka" oraz „Michał", które przecież nie są zdaniami. **[10/11]**

3. Spójniki

Zanalizujemy teraz nieco dokładniej wyrażenie „Kopernik sądził, że p". Gdy za występującą w nim zmienną wstawi się określone zdanie, to całe to wyrażenie również przekształci się w zdanie. Wstawmy więc za „p” prawdziwe zdanie „Toruń leży nad Wisłą”. Otrzymamy wówczas zdanie „Kopernik sądził, że Toruń leży nad Wisłą”, które także jest prawdziwe, bo urodzony w Toruniu Kopernik z pewnością wiedział, że miasto to leży nad Wisłą. Wstawmy jednak za „p” inne zdanie prawdziwe, a mianowicie zdanie „Geny determinują kolor włosów człowieka”. Otrzymamy wówczas zdanie „Kopernik sądził, że geny determinują kolor włosów człowieka”. Jak wiadomo, w czasach Kopernika nie wiedziano jeszcze o istnieniu genów. Stąd też i Kopernik nie zdawał sobie sprawy z zależności między genami a kolorem włosów człowieka. Przeto całe powyższe zdanie jest fałszywe. Wstawmy teraz za „p” fałszywe zdanie „2 + 3 = 7”. Otrzymamy wówczas zdanie „Kopernik sądził, że 2 + 3 = 7”, które z pewnością jest fałszywe, bo Kopernik dobrze znał elementarną arytmetykę i nie podtrzymywał tak błędnych twierdzeń. Wstawmy wreszcie za „p” zdanie „Muchy rodzą się ze zgniłego mięsa”, o którym dziś wiemy, że jest fałszywe. Powstałe w wyniku tego wstawienia zdanie „Kopernik sądził, że muchy rodzą .się ze zgniłego mięsa” będzie jednak prawdziwe, bo przekonanie o samorództwie było w czasach Kopernika powszechne, przeto żywił je również Kopernik.

Jak widać, wartość logiczna całego zdania powstałego z wyrażenia „Kopernik sądził, że p” nie jest wyznaczona przez wartość logiczną zdania wstawionego w miejsce zmiennej „p”. Wstawiając bowiem za tę zmienną pewne zdanie prawdziwe, otrzymujemy całość będącą zdaniem prawdziwym. Wstawiając jednak za tę zmienną inne zdanie prawdziwe, otrzymujemy całość będącą zdaniem fałszywym. Z kolei wstawiając za nią pewne zdanie fałszywe, otrzymujemy całość będącą zdaniem fałszywym. Wstawiając jednak za nią inne zdanie fałszywe, otrzymujemy całość będącą zdaniem prawdziwym. Wartość logiczna zdania o Koperniku nie zależy więc wyłącznie od wartości logicznej zdań wstawianych za zmienną „p”, lecz zależy od ich treści. **[11/12]**

Rozważmy teraz wyrażenie „Nie jest tak, że p”. Gdy za zmienną „p” wstawimy prawdziwe zdanie „Poznań leży nad Wartą”, to otrzymamy fałszywe zdanie „Nie jest tak, że Poznań leży nad Wartą”. Gdy za te zmienną wstawimy jakiekolwiek zdanie prawdziwe, to zawsze otrzymamy jako całość zdanie fałszywe. Gdy na przykład za „p” wstawimy prawdziwe zdanie „2 + 2 = 4”, to otrzymamy fałszywe zdanie „Nie jest tak, że 2 + 2 = 4”, a gdy za tę zmienną wstawimy prawdziwe zdanie „Jaskółki są ptakami”, to otrzymamy fałszywe zdanie „Nie jest tak, że jaskółki są ptakami”. Gdy natomiast za zmienną „p” wstawimy fałszywe zdanie „Warszawa leży nad Wartą”, to otrzymamy prawdziwe zdanie „Nie jest tak, że Warszawa leży nad Wartą”. Gdy za tę zmienną wstawimy jakiekolwiek inne zdanie fałszywe, to zawsze otrzymamy jako całość zdanie prawdziwe. Gdy na przykład za „p” wstawimy fałszywe zdanie „Polska leży w Afryce”, to otrzymamy prawdziwe zdanie „Nie jest tak, że Polska leży w Afryce”, a gdy wstawimy za nią fałszywe zdanie „Niedźwiedzie są ptakami”, to otrzymamy prawdziwe zdanie „Nie jest tak, że niedźwiedzie są ptakami”. Wyrażenie „nie jest tak, że” ma zatem tę właściwość, że po dołączeniu do niego zdania otrzymuje się nowe zdanie, którego wartość logiczna zależy wyłącznie od wartości logicznej zdania dołączonego. Wyrażenia o tej właściwości nazywamy **spójnikami logicznymi** albo - krótko - **spójnikami**. Ze względu na ilość dołączanych do spójników zdań dzielimy je na spójniki jednoargumentowe, dwuargumentowe, trójargumentowe itd. **Spójnikiem jednoargumentowym** nazywamy więc takie wyrażenie, które po dołączeniu do niego jednego zdania jako argumentu daje nowe zdanie o wartości logicznej wyznaczonej - w szczególny sposób - przez wartość logiczną zdania dołączonego.

Tę właściwość spójników jednoargumentowych można wykorzystać, charakteryzując je za pomocą szczególnych tabelek zwanych matrycami. Od razu zaznaczmy, że - ściśle rzecz biorąc -matryce nie charakteryzują wyrażeń języka potocznego, lecz ich odpowiedniki stanowiące przedmiot badań logicznych. Takim logicznym odpowiednikiem potocznego wyrażenia „nie jest tak, że” jest **spójnik negacji** oznaczany symbolem „~”. Budując matrycę dla tego spójnika, zamiast pisać „zdanie prawdziwe” będziemy pisać krótko „1”, a zamiast pisać „zdanie fałszywe” **[12/13]** będziemy pisać krótko „0”. Spójnik negacji charakteryzuje więc następująca matryca:

p	~ p
1	0
0	1

Wskazuje ona, że wartość logiczna zdania powstałego przez poprzedzenie argumentu spójnikiem negacji wyznaczona jest - w szczególny sposób - przez wartość logiczną rzeczonego argumentu. Gdy argument jest zdaniem prawdziwym, to zdanie powstałe przez poprzedzenie go tym spójnikiem jest fałszywe. Gdy natomiast argument jest fałszywy, to zdanie powstałe przez poprzedzenie go spójnikiem negacji jest prawdziwe. Jak już zaznaczono, odpowiednikiem tak pojętego spójnika negacji jest w języku polskim wyrażenie „nie jest tak, że". Do pewnego stopnia jego odpowiednikiem jest także wyrażenie „nieprawda, że", a również i samo słowo „nie".

Zdanie dołączone do spójnika negacji jako jego argument nazywamy **zdaniem zanegowanym**, zaś zdanie powstałe przez zanegowanie określonego zdania nazywamy **negacją**. Zatem negacją powstałą ze zdania „Poznań leży nad Wartą" jest zdanie „Nie jest tak, że Poznań leży nad Wartą", zaś negacją powstałą ze zdania „Polska leży w Afryce" jest zdanie „Nie jest tak, że Polska leży w Afryce". W języku polskim zdanie „Nie jest tak, że Poznań leży nad Wartą" uchodzi za tożsame ze zdaniem „Nieprawda, że Poznań leży nad Wartą" oraz za tożsame ze zdaniem „Poznań nie leży nad Wartą". Podobnie zdanie „Nie jest tak, że Polska leży w Afryce" uchodzi za tożsame ze zdaniem „Nieprawda, że Polska leży w Afryce" oraz „Polska nie leży w Afryce". Możemy więc powiedzieć, że negacją powstałą ze zdania „Poznań leży nad Wartą" jest zdanie „Poznań nie leży nad Wartą", a negacją powstałą ze zdania „Polska leży w Afryce" jest zdanie „Polska nie leży w Afryce". Z kolei negacją powstałą ze zdania „Poznań nie leży nad Wartą" jest zdanie „Nie jest tak, że Poznań nie leży nad Wartą", a negacją powstałą z tego zdania jest zdanie „Nie jest tak, że nie jest tak, że Poznań nie leży nad Wartą". Zdanie zanegowane oraz powstała z niego negacja stanowią parę **zdań wzajem sprzecznych**. Zatem zdania „Poznań leży nad Wartą" i „Poznań nie leży nad Wartą" stanowią parę zdań wzajem sprzecznych. Również zdania „Poznań nie leży nad Wartą" **[13/14]** i „Nie jest tak, że Poznań nie leży nad Wartą" tworzą parę zdań wzajem sprzecznych. Także zdania „Polska leży w Afryce" oraz „Polska nie leży w Afryce" są parą zdań wzajem sprzecznych.

Łatwo zauważyć, że obok spójnika negacji występują jeszcze trzy inne spójniki jednoargumentowe. Matryce wszystkich tych spójników przedstawiają się następująco:

p	~ p			
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0

Druga kolumna określa znany nam już spójnik negacji. Trzecia kolumna określa spójnik, który po dołączeniu do zdania prawdziwego daje zdanie prawdziwe, a po dołączeniu do zdania fałszywego daje zdanie fałszywe. Spójnik ten nazywany bywa spójnikiem asercji. Odpowiada mu w języku polskim zwrot „jest tak, że". Kolejny spójnik tym się charakteryzuje, że po dołączeniu do niego zarówno zdania prawdziwego, jak i zdania fałszywego daje zdanie prawdziwe. Nie jest on odpowiednikiem jakiegoś wyrażenia języka polskiego. Wreszcie ostatni spójnik tym się charakteryzuje, że po dołączeniu do niego zarówno zdania prawdziwego, jak i zdania fałszywego daje zdanie fałszywe. Również i ten spójnik nie jest odpowiednikiem jakiegoś wyrażenia języka polskiego. Spośród wskazanych tu czterech spójników jednoargumentowych dalej interesować nas będzie tylko spójnik negacji.

Jak już zaznaczono, obok spójników jednoargumentowych występują także spójniki dwuargumentowe. **Spójnikiem dwuargumentowym** nazywamy takie wyrażenie, które po dołączeniu do niego dwóch zdań jako argumentów daje nowe zdanie o wartości logicznej wyznaczonej - w szczególny sposób - przez wartości logiczne dołączonych zdań. Takim spójnikiem dwuargumentowym jest **spójnik koniunkcji** oznaczany symbolem „∧". Określa go następująca matryca:

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

[15/16]

Jak widać, spójnik koniunkcji tym się charakteryzuje, że powstałe z niego zdanie jest prawdziwe tylko wtedy, gdy oba jego argumenty są prawdziwe. Gdy zaś choć jeden z argumentów jest fałszywy, to zdanie zbudowane za pomocą spójnika koniunkcji też jest fałszywe. Zdania dołączone jako argumenty do spójnika koniunkcji nazywa się **czynnikami**. Zdanie zbudowane z tego spójnika i jego argumentów nazywa się **koniunkcją**.

Spójnikowi koniunkcji odpowiada w języku polskim słowo „i”, a do pewnego stopnia także słowa „oraz” tudzież „a”. Zdanie „Poznań leży nad Wartą i Konin leży nad Wartą” jest prawdziwe, gdyż zarówno zdanie „Poznań leży nad Wartą”, jak i zdanie „Konin leży nad Wartą” są prawdziwe. Natomiast zdanie „Kasia studiuje prawo i Basia studiuje prawo” jest fałszywe, jeśli choć jedna z tych dziewczyn nie studiuje prawa. Jednakże słowo „i” nie w pełni odpowiada spójnikowi koniunkcji i to co najmniej z trzech powodów. Po pierwsze, w odróżnieniu od spójnika koniunkcji łączącego zdania o dowolnej treści, słowem „i” łączy się w zasadzie tylko zdania zbieżne treściowo. O ile bowiem za poprawne uchodzi zdanie „Kasia studiuje prawo i Basia studiuje prawo”, o tyle trudno byłoby uznać za poprawne zdanie „Poznań leży nad Wartą i jaskółki są ptakami”. Po drugie, w odróżnieniu od spójnika koniunkcji, użycie słowa „i” uchodzi za niepoprawne, gdy zdania są wprawdzie zbieżne treściowo, ale wskazują na pewien kontrast. Nie mówi się przecież „Janusz jest wysoki i Marcin jest niski”. Mówi się raczej „Janusz jest wysoki a Marcin jest niski”, posługując się słowem „a” jako odpowiednikiem spójnika koniunkcji. Po trzecie, w odróżnieniu od neutralnego pod tym względem spójnika koniunkcji, słowo „i” uwzględnia kolejność zdarzeń opisywanych przez dołączone do niego zdania. Zdanie występujące przed „i” opisuje to, co zdarzyło się nie później od tego, co opisuje zdanie po „i”. W odróżnieniu bowiem od poprawnego zdania „Michał założył łyżwy i Michał wyjechał na lód” zdanie „Michał wyjechał na lód i Michał założył łyżwy” uchodzi za niepoprawne, gdyż sugeruje, że wyjazd na lód poprzedził założenie łyżew.

Innym spójnikiem dwuargumentowym jest **spójnik alternatywy** oznaczany symbolem „$\vee$”. Określa go następująca matryca: **[15/16]**

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Jak widać, spójnik alternatywy tym się charakteryzuje, że powstałe z niego zdanie jest prawdziwe już wtedy, gdy chociaż jeden z jego argumentów jest prawdziwy. Gdy zaś oba argumenty są fałszywe, to zdanie zbudowane za pomocą spójnika alternatywy też jest fałszywe. Zdania, dołączone do spójnika alternatywy jako argumenty nazywa się **składnikami**. Zdanie zbudowane z tego spójnika i jego argumentów nazywa się **alternatywą**.

Spójnikowi alternatywy odpowiada w języku polskim słowo „lub”. Zdanie „Mirek uczy się prawa rzymskiego lub Mirek uczy się podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa” jest prawdziwe, gdy Mirek uczy się przynajmniej jednego z tych przedmiotów. Natomiast zdanie „Warta wpada do Wisły lub Noteć wpada do Wisły” jest fałszywe, bo oba składniki są zdaniami fałszywymi. Jednakże również i tu trzeba zaznaczyć, że słowo „lub” nie w pełni odpowiada spójnikowi alternatywy, gdyż w odróżnieniu od niego - nie łączy zdań nie powiązanych treściowo.

Jeszcze innym spójnikiem dwuargumentowym jest **spójnik implikacji** oznaczany symbolem „$\rightarrow$”. Określa go następująca matryca:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1

0	0	1

Jak widać, spójnik implikacji tym się charakteryzuje, że powstałe z niego zdanie jest fałszywe tylko wtedy, gdy argument poprzedzający spójnik jest prawdziwy a argument występujący po spójniku jest fałszywy. Ponieważ pierwszy z argumentów nazywa się **poprzednikiem**, zaś drugi nazywa się **następnikiem**, dlatego możemy powiedzieć, że zdanie powstałe ze spójnika implikacji **[16/17]** jest fałszywe tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Zdanie zbudowane z tego spójnika i jego argumentów nazywa się **implikacją**.

Spójnikowi implikacji odpowiadają w języku polskim takie wyrażenia jak „jeśli, to", „jeżeli, to", a do pewnego stopnia także wyrażenie „gdyby, to". Jednakże żaden z tych zwrotów nie odpowiada mu w pełni i to co najmniej z dwóch powodów. Po pierwsze, w odróżnieniu od spójnika implikacji, łączącego zdania o dowolnej treści, wyrażeniami wyżej przytoczonymi łączy się w zasadzie tylko zdania o zbieżnej treści. O ile bowiem za poprawne uchodzi zdanie „Jeśli pada deszcz, to jest mokro", o tyle trudno byłoby uznać za poprawne zdanie „Jeśli Poznań leży nad Wartą, to 2 + 2 = 4". Po drugie, w odróżnieniu od spójnika implikacji dającego z dwoma fałszywymi argumentami zdanie prawdziwe, jego odpowiedniki prowadzą w takim przypadku do zdania, którego wartość logiczna budzi wątpliwości. Zgodnie z powyższą matrycą zdanie „Poznań leży w Azji → mieszkańcy Poznania mówią po hiszpańsku" jest zdaniem prawdziwym. Natomiast rodzą się wątpliwości co do uznania za prawdziwe zdania „Jeżeli Poznań leży w Azji, to mieszkańcy Poznania mówią po hiszpańsku".

Wreszcie ostatnim z interesujących nas tu spójników dwuargumentowych jest **spójnik równoważności** oznaczany symbolem „≡". Określa go następująca matryca:

p	q	p ≡ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Jak widać, spójnik równoważności tym się charakteryzuje, że powstałe z niego zdanie jest prawdziwe wtedy, gdy oba argumenty mają taką samą wartość logiczną, a więc oba są prawdziwe albo oba są fałszywe. Zdania dołączone do spójnika równoważności jako argumenty nazywa się **członami**. Zdanie zbudowane z tego spójnika i jego argumentów nazywa się **równoważnością**. Spójnikowi równoważności odpowiada w języku polskim wyrażenie „wtedy i tylko wtedy, gdy". Zdanie „Marcin idzie na wykład wtedy i tylko wtedy, gdy Marcin niesie pod pachą **[17/18]** podręcznik" jest prawdziwe w dwóch przypadkach. Po pierwsze, jest ono prawdziwe, gdy prawdziwe są zdania „Marcin idzie na wykład" i „Marcin niesie pod pachą podręcznik". Po drugie, jest ono prawdziwe, gdy zdania „Marcin idzie na wykład" i „Marcin niesie pod pachą podręcznik" są oba fałszywe. Również i tu trzeba zaznaczyć, że wyrażenie „wtedy i tylko wtedy, gdy" nie w pełni odpowiada równoważności, ponieważ - w odróżnieniu od niej - nie łączy zdań nie powiązanych treściowo.

Łatwo zauważyć, że obok przedstawionych wyżej spójników, występuje jeszcze 12 innych spójników dwuargumentowych. Łącznie mamy więc 16 spójników tego rodzaju. Matryce wszystkich tych spójników przedstawiają się następująco:

p	q		∧						≡				∨		→		
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

Trzecia kolumna określa spójnik, który przy wszelkich wartościach argumentów daje zdanie fałszywe. Spójnik ten nie ma odpowiednika w języku polskim. Z kolei czwarta kolumna określa znany nam już spójnik koniunkcji. Kolejna kolumna określa spójnik, który daje zdanie prawdziwe tylko wtedy, gdy jego pierwszy argument jest prawdziwy, a drugi fałszywy. We wszystkich pozostałych przypadkach daje on zdanie prawdziwe. Również i ten spójnik nie ma swego odpowiednika w języku polskim. Następne kolumny określają spójniki wyznaczające rozmaite wartości logiczne budowanym przy ich pomocy zdaniom, w zależności od wartości logicznych argumentów. Pośród nich występują omówione wyżej spójniki alternatywy, implikacji i równoważności. Wreszcie w ostatniej kolumnie określony jest spójnik, który przy wszelkich wartościach argumentów daje zdanie prawdziwe. Również i ten spójnik nie ma odpowiednika w języku polskim.

Obok spójników jedno- i dwuargumentowych dają się także skonstruować spójniki trójargumentowe. Spójnikiem trójargumentowym nazywamy takie wyrażenie, które po dołączeniu do niego trzech zdań jako argumentów daje nowe zdanie o wartości logicznej wyznaczonej - w szczególny sposób - przez wartość **[18/19]** logiczną dołączonych zdań. Spójniki trójargumentowe nie mają jednak swoich odpowiedników w języku polskim. Nie mają w nim też swoich odpowiedników spójniki cztero- i więcej argumentowe. Uogólniając możemy więc powiedzieć, że **spójnikiem n-argumentowym** nazywamy takie wyrażenie, które z n-tką zdań jako argumentów daje nowe zdanie o wartości logicznej wyznaczonej - w szczególny sposób - przez wartość logiczną dołączonych zdań. Dalej interesować nas będą wyłącznie spójniki negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności.

Ze względu na obecność bądź nieobecność spójników dzielimy zdania na proste i złożone. **Zdaniem prostym** nazywamy takie zdanie, w którym nie występuje żaden spójnik. Zdaniami prostymi są na przykład zdania „Poznań leży nad Wartą", „Kasia studiuje prawo", „2 + 2 = 4" oraz „Wróble są ptakami". Natomiast **zdaniem złożonym** nazywamy takie zdanie, w którym występuje co najmniej jeden spójnik. Zdaniami złożonymi są na przykład zdania „Marcin nie idzie na wykład", „Paryż jest stolicą Włoch lub Paryż jest stolicą Hiszpanii", „Jeśli lipiec jest suchy, to sierpień jest przeokropny, a we wrześniu masowo rosną grzyby", oraz „Nie jest tak, że (Warta wpada do Odry wtedy i tylko wtedy, gdy Warta wpada do Wisły)".

4. Wyrażenia rachunku zdań

Dysponujemy już pojęciami zmiennych oraz spójników. Pozwala to budować wyrażenia rachunku zdań. Otóż: 1) każda zmienna zdaniowa jest wyrażeniem rachunku zdań, 2) jeżeli sekwencja postaci A jest wyrażeniem rachunku zdań, to także sekwencja postaci ~ A jest wyrażeniem rachunku zdań, 3) jeżeli sekwencje postaci A oraz B są wyrażeniami rachunku zdań, to także sekwencje postaci $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \equiv B$ są wyrażeniami rachunku zdań. Określenie to wyznacza zbiór wszystkich wyrażeń rachunku zdań. Inaczej mówiąc, określenie to wskazuje jak należy budować wyrażenie, aby było ono wyrażeniem rachunku zdań.

Zgodnie z punktem 1 powyższego określenia wyrażeniami **[19/20]** rachunku zdań są poszczególne zmienne zdaniowe „p", „q", „r", „s" itd. Na podstawie punktu 2 wyrażeniami rachunku zdań są także negacje zmiennych zdaniowych, a wiec wyrażenia „~ p", „~ q", „~ r" itd. Ponieważ „~ p" jest wyrażeniem rachunku zdań, to - na podstawie punktu 2 - wyrażeniem rachunku zdań jest także „~ ~ p". Na tej samej podstawie wyrażeniami rachunku zdań są również „~ ~ q" i „~ ~ r". Ponieważ „~ ~ p" jest wyrażeniem rachunku zdań, to - na podstawie punktu 2 - wyrażeniem rachunku zdań jest także „~ ~ ~ p". Na tej samej podstawie wyrażeniami rachunku zdań są „~ ~ ~ q" i „~ ~ ~ r", a dalej także „~ ~ ~ ~ p", „~ ~ ~ ~ q" itd. Ponieważ zmienne „p" i „q" są wyrażeniami rachunku zdań, to - na podstawie punktu 3 - wyrażeniami rachunku zdań są także „$p \wedge q$", „$p \vee q$", „$p \rightarrow q$" oraz „$p \equiv q$". Ponieważ wyrażeniami rachunku zdań są „~ p" i „~ q", to - na podstawie punktu 3 - wyrażeniami rachunku zdań są także „$\sim p \wedge \sim q$", „$\sim p \vee \sim q$", „$\sim p \rightarrow \sim q$" i „$\sim p \equiv \sim q$", a także „$p \wedge \sim q$", „$p \vee \sim q$", „$p \rightarrow \sim q$" i „$p \equiv \sim q$", a również „$\sim p \wedge q$", „$\sim p \vee q$", „$\sim p \rightarrow q$" oraz „$\sim p \equiv q$" itd.

Budując nieco bardziej skomplikowane wyrażenia rachunku zdań, będziemy pomocniczo posługiwać się nawiasami. Wykażemy teraz, że „$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$" jest wyrażeniem rachunku zdań. Na podstawie punktu 1 podanego wyżej określenia wyrażeniami rachunku zdań są zmienne „p" i „q". Na podstawie punktu 2 wyrażeniami rachunku zdań są więc także „~ p" i „~ q". Skoro „p" i „q" są wyrażeniami rachunku zdań, to - na podstawie punktu 3 - wyrażeniem rachunku zdań jest też „$p \wedge q$". Skoro zaś „$p \wedge q$" jest wyrażeniem rachunku zdań, to - na podstawie punktu 2 - wyrażeniem rachunku zdań jest także „~ (p ∧ q)”. Skoro „~ p” i „~ q” są wyrażeniami rachunku zdań, to - na podstawie punktu 3 - wyrażeniem rachunku zdań jest także „~ p ∨ ~ q”. Jeśli zaś „~ (p ∧ q)” oraz „~ p ∨ ~ q” są wyrażeniami rachunku zdań, to - na podstawie punktu 3 - wyrażeniem rachunku zdań jest także „~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)”.

Wykażemy obecnie, że „~ [(p ∧ q) → (p ∨ q)]” jest wyrażeniem rachunku zdań. Na podstawie punktu 1 wyrażeniami rachunku zdań są zmienne „p” i „q”. Przeto na podstawie punktu 3 wyrażeniami rachunku zdań są także „p ∧ q” oraz „p v q”. A jeśli tak, to - na podstawie punktu 3 - wyrażeniem rachunku zdań jest także „(p ∧ q) → (p ∨ q)”. Wobec **[20/21]** powyższego - na podstawie punktu 2 - wyrażeniem rachunku zdań jest również „~ [(p ∧ q) → (p ∨ q)]”.

Wykażemy jeszcze, że „(r ≡ q) ∨ [(~ p → ~ r) ∧ (q ∨ ~ p)]” jest wyrażeniem rachunku zdań. Na podstawie punktu 1 wyrażeniami rachunku zdań są zmienne zdaniowe „r”, „q”, „p”. Zatem - na podstawie - punktu 2 - wyrażeniami rachunku zdań są także „~ r” i „~ p”. Wobec powyższych ustaleń wyrażeniami rachunku zdań - na podstawie punktu 3 - są również „r ≡ q”, „~ p → ~ r” oraz „q v ~ p”. A stąd - na podstawie punktu 3 - wyrażeniem rachunku zdań jest również „(~ p → r) ∧ (q ∨ ~ p)”. Wobec powyższego - na podstawie punktu 3 - wyrażeniem rachunku zdań jest także badane tu „(r ≡ q) ∨ [(~ p → ~ r) ∧ (q ∨ ~ p)]”.

Łatwo zauważyć, że wyrażeń rachunku zdań jest nieskończenie wiele. Skoro bowiem wyrażeniem takim jest zmienna „p”, to jest nim też „p ∧ p”, a więc również „(p ∧ p) ∧ p”, „[(p ∧ p) ∧ p] ∧ p” itd. Podobnie, skoro wyrażeniem rachunku zdań jest zmienna „q”, to jest nim również „q ∨ q”, a także „(q ∨ q) ∨ q”, „[(q ∨ q) ∨ q] ∨ q” itd. Zatem już tak skonstruowanych wyrażeń jest nieskończenie wiele. Nie ma też jakiejś granicznej długości, czy stopnia komplikacji wyrażeń rachunku zdań. Niemniej jednak każde, nawet niebywale skomplikowane wyrażenie rachunku zdań ma skończoną długość. Nie ma więc wyrażeń rachunku zdań o nieskończonej długości.

Należy zauważyć, że nie każda sekwencja zmiennych zdaniowych i spójników oraz pomocniczo użytych nawiasów stanowi wyrażenie rachunku zdań. Nie jest nim na przykład sekwencja „pp → q”. Chociaż bowiem wyrażeniami rachunku zdań są zmienne „p” i „q”, to jednak nie jest nią sekwencja „pp”, co uniemożliwia już wyprowadzenie jako wyrażenia rachunku zdań całej sekwencji „pp → q”. Nie jest też wyrażeniem rachunku zdań sekwencja „(p ∧ q) → ∨ (q ∧ p)”. Chociaż bowiem wyrażeniami rachunku zdań są „(p ∧ q)” oraz „(q ∧ p)”, to żaden z punktów 1-3 podanego określenia nie zalicza do takich wyrażeń całej sekwencji „(p ∧ q) → ∨ (q ∧ p)”. Nie jest też wyrażeniem rachunku zdań sekwencja „(r → ~ p) ≡”. Chociaż bowiem jest nim „r → ~ p”, to żaden z punktów 1-3 nie zalicza do wyrażeń rachunku zdań całej sekwencji „(r → ~ p) ≡” **[21/22]**

5. Pojęcie tezy rachunku zdań

Gdy za występujące w wyrażeniu rachunku zdań zmienne zdaniowe wstawi się zdania, to całe wyrażenie również przekształci się w zdanie. Na przykład, gdy w wyrażeniu „p ∨ q” za zmienne wstawimy odpowiednio zdania „Kasia studiuje prawo” i „Basia studiuje prawo”, to wyrażenie to przekształci się w zdanie „Kasia studiuje prawo ∨ Basia studiuje prawo”. Łatwo zauważyć, że niektóre wyrażenia rachunku zdań przy pewnych wstawieniach za występujące w nich zmienne przekształcają się w zdania prawdziwe, a przy innych w zdania fałszywe. Takim wyrażeniem jest na przykład sama zmienna „p”, za którą wolno wstawiać dowolne zdanie. Jeśli więc wstawimy za nią zdanie prawdziwe, to efektem tej operacji będzie właśnie owo zdanie prawdziwe. Jeśli natomiast wstawimy za nią zdanie fałszywe, to efektem tej operacji będzie właśnie owo zdanie fałszywe. Takim wyrażeniem rachunku zdań, które przy pewnych wstawieniach przekształca się w zdanie prawdziwe a przy innych w zdanie fałszywe jest również wyrażenie „p → q”. Jeśli bowiem za „p” wstawimy zdanie „Jaskółki są ptakami”, a za „q” zdanie „Niedźwiedzie są rybami”, to otrzymamy fałszywe zdanie „Jaskółki są ptakami → Niedźwiedzie są rybami”. Jeśli natomiast za „p” wstawimy zdanie „Poznań leży nad Wartą”, a za „q” zdanie „Śrem leży nad Wartą”, to otrzymamy prawdziwe zdanie „Poznań leży nad Wartą → Śrem leży nad Wartą”.

Pośród wyrażeń rachunku zdań są jednak i takie wyrażenia, które przy wszelkich wstawieniach za występujące w nich zmienne przekształcają się w zdania prawdziwe. Weźmy na przykład wyrażenie „(p ∧ q) → p". Wstawmy za zmienną „p" zdanie „Poznań leży nad Wartą", a za zmienną „q" zdanie „Śrem leży nad Wartą". Otrzymamy wówczas zdanie „(Poznań leży nad Wartą ∧ Śrem leży nad Wartą) → Poznań leży nad Wartą". Ponieważ zdanie „Poznań leży nad Wartą" jest prawdziwe, przeto prawdziwy jest następnik tej implikacji. Ponieważ także i zdanie „Śrem leży nad Wartą" jest prawdziwe, więc prawdziwy jest i poprzednik tej implikacji. Skoro zaś zarówno poprzednik, jak i następnik implikacji są prawdziwe, to i cała ta implikacja jest zdaniem prawdziwym. Wstawmy teraz w owym wyrażeniu za zmienną „p" zdanie „Stolicą Włoch jest Wenecja", a za zmienną „q" zdanie **[22/23]** „Rysy są wyższe od Giewontu". Otrzymamy wówczas zdanie „(Stolicą Włoch jest Wenecja ∧ Rysy są wyższe od Giewontu) → Stolicą Włoch jest Wenecja". Ponieważ zdanie „Stolicą Włoch jest Wenecja" jest fałszywe, dlatego zarówno poprzednik jak i następnik tej implikacji są fałszywe. Skoro jednak poprzednik i następnik implikacji są zdaniami fałszywymi, to cała ta implikacja jest zdaniem prawdziwym.

Próbując na tej drodze ustalić, czy wyrażenie „(p ∧ q) → p" przekształca się zawsze w zdanie prawdziwe należałoby zanalizować wszystkie możliwe wstawienia za występujące w nim zmienne, co - oczywiście - jest zadaniem niewykonalnym. Spróbujmy zatem postąpić nieco inaczej, wstawiając za zmienne odpowiednio zdania „Kasia studiuje prawo" i „Basia studiuje prawo". Otrzymujemy wówczas zdanie „(Kasia studiuje prawo ∧ Basia studiuje prawo) → Kasia studiuje praw". Przypuśćmy, że zdanie „Kasia studiuje prawo" jest fałszywe. Zgodnie z matrycą spójnika koniunkcji fałszywe jest wówczas zdanie „Kasia studiuje prawo ∧ Basia studiuje prawo", będące poprzednikiem powyższej implikacji. Skoro zaś poprzednik jest fałszywy, to - zgodnie z matrycą spójnika implikacji - cała ta implikacja jest prawdziwa. Przypuśćmy teraz, że zdanie „Kasia studiuje prawo" jest prawdziwe. Zdanie to stanowi następnik analizowanej tu implikacji. Skoro zaś następnik jest prawdziwy, to - zgodnie z matrycą spójnika implikacji - cała ta implikacja też jest prawdziwa. Przeto we wszystkich możliwych przypadkach, przy dowolnej wartości logicznej zdania „Kasia studiuje prawo", cała implikacja jest prawdziwa. Znaczy to, że przy wszelkich możliwych wstawieniach za zmienne wyrażenie „(p ∧ q) → p" przekształca się w zdanie prawdziwe.

Wyrażenia rachunku zdań, które przy wszelkich wstawieniach za występujące w nich zmienne przekształcają się w zdania prawdziwe nazywamy **tezami rachunku zdań**. Wyrażenia te nazywa się także schematami tautologicznymi rachunku zdań albo (rachunkowozdaniowymi) prawami logiki. Zatem wyrażenie „(p ∧ q) → p" jest tezą rachunku zdań. Natomiast ani wyrażenie „p", ani wyrażenie „p → q" nie są tezami rachunku zdań. Ogół wyrażeń rachunku zdań dzieli się więc na tezy oraz na wyrażenia, które nie są tezami. Należy zauważyć, że tez rachunku zdań jest nieskończenie wiele. Dla uzasadnienia tego twierdzenia wystarczy wskazać, że obok wyrażenia „(p ∧ q) → p", tezami rachunku zdań **[23/24]** są także wyrażenia „[p ∧ (q ∧ r)] → p", „[(p ∧ q) ∧ (r ∧ s)] → p" „{p ∧ [(q ∧ r) ∧ (s ∧ t)]} → p" itd.

6. Metoda zero-jedynkowa

Przedstawiony wyżej sposób ustalania, czy wyrażenie „(p ∧ q) → p" jest tezą rachunku zdań wskazuje na pewną ogólną metodę przeprowadzania takich ustaleń, zwaną metodą zero-jedynkową. Metoda ta pozwala w skończonej ilości kroków ustalić, czy dane wyrażenie rachunku zdań jest, czy też nie jest tezą. Polega ona na skonstruowaniu tabelki, wykazującej jaką wartość logiczną ma zdanie powstałe z badanego wyrażenia rachunku zdań przy określonej wartości logicznej zdań wstawianych za występujące w tym wyrażeniu zmienne. Zilustrujemy to na przykładzie wyrażenia „~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)".

Skonstruowanie tabelki składa się z trzech etapów. Pierwszy etap polega na ustaleniu jej poszczególnych kolumn. Najprostszymi wyrażeniami rachunku zdań występującymi w wyrażeniu „~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)" są zmienne „p" i „q". Nieco bardziej skomplikowanymi wyrażeniami są „~ p" i „~ q", a dalej „p ∧ q", „~ (p ∧ q)" i „~ p ∨ ~ q". Wreszcie, najbardziej skomplikowanym wyrażeniem jest samo „~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)". Mamy tedy 8 wyrażeń rachunku zdań związanych z badanym wyrażeniem. Dla każdego z nich należy przeznaczyć jedną kolumnę w tabelce. Zatem tabelka będzie się składać z następujących kolumn:

p	q	~ p	~ q	p ∧ q	~ (p ∧ q)	~ p ∨ ~ q	~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)

Jak widać, tabelka ta ma 8 kolumn.

Drugi etap polega na ustalaniu rzędów tabelki oraz wypełnianiu kolumn związanych z poszczególnymi zmiennymi. Za każdą z nich wolno wstawić dowolne zdanie. Będą to więc zdania o najrozmaitszej treści, lecz każde z nich będzie albo prawdziwe albo fałszywe. Zatem możliwe są tylko cztery przypadki: 1) za obie zmienne wstawia się zdanie prawdziwe, 2) za „p” wstawia się zdanie prawdziwe, a za „q” fałszywe, 3) za „p” wstawia się zdanie fałszywe, a za „q” prawdziwe, 4) za obie zmienne wstawia się **[24/25]** zdanie fałszywe. Po wykonaniu zadań tego etapu tabelka przedstawia się następująco:

p	q	~ p	~ q	p ∧ q	~ (p ∧ q)	~ p ∨ ~ q	~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

Jak widać, o ilości rzędów decyduje ilość zmiennych występujących w badanym wyrażeniu. Gdy jest w nim n zmiennych, to tabelka ma 2^n rzędów. Jeśli więc w wyrażeniu występuje tylko jedna zmienna, to tabelka ma 2 rzędy. Przy dwóch zmiennych tabelka ma 4 rzędy, przy trzech zmiennych ma 8 rzędów, przy czterech zmiennych ma 16 rzędów itd.

Trzeci etap polega na wypełnieniu pozostałych kolumn w tabelce w oparciu o matryce poszczególnych spójników. Tak więc, w oparciu o matrycę spójnika negacji, w kolumnie dla „~ p” należy wpisać 0 tam, gdzie w kolumnie dla „p” występuje 1, oraz 1 wpisać tam, gdzie w kolumnie dla „p” występuje 0. Podobnie rzecz się ma z kolumną dla „~ q”, którą należy wypełnić w oparciu o matrycę spójnika negacji i kolumnę dla „q”. Z kolei kolumnę dla „p ∧ q” należy wypełnić w oparciu o matrycę spójnika koniunkcji i kolumny dla „p” oraz „q”. Kolumnę dla „~ p ∨ ~ q” należy wypełnić w oparciu o matrycę spójnika alternatywy oraz kolumny dla „~ p” i „~ q”. Wreszcie kolumnę dla „~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)” należy wypełnić w oparciu o matrycę spójnika równoważności oraz kolumny dla „~ (p ∧ q)” i „(~ p ∨ ~ q)”. Po wykonaniu tych czynności tabelka przedstawia się następująco:

p	q	~ p	~ q	p ∧ q	~ (p ∧ q)	~ p ∨ ~ q	~ (p ∧ q) ≡ (~ p ∨ ~ q)
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Jak widać, w ostatniej kolumnie występują same jedynki. Zatem przy wszelkich wstawieniach za zmienne zdaniowe badane tu **[25/26]** wyrażenie przekształca się w zdanie prawdziwe. Wyrażenie to jest więc tezą rachunku zdań.

Zbadajmy jeszcze, czy jest tezą rachunku zdań wyrażenie „[(~ r ≡ q) ∨ (p → ~ q)] → (r ∧ p)”. Należy tu wyróżnić następujące wyrażenia: „r” „q”, „p , „~ r”, „(~ r ≡ q) ∨ (p → ~ q)”, „r ∧ p” oraz całe badane wyrażenie „[(~ r ≡ q) ∨ (p → ~ q)] → (r ∧ p)”. Zatem tabelka będzie się składała z 10 kolumn. Ponieważ w badanym wyrażeniu występują 3 zmienne, dlatego w tabelce będzie 8 rzędów. Aby uwzględnić wszystkie możliwe kombinacje zdań prawdziwych i fałszywych wstawianych za poszczególne zmienne, należy zastosować szczególną taktykę realizowania zadań drugiego etapu. Po ustaleniu ilości rzędów należy kolumnę przeznaczoną dla pierwszej zmiennej podzielić na połowy i pierwszą z nich wypełnić jedynkami, a drugą zerami. Następnie kolumnę przeznaczoną dla drugiej zmiennej należy podzielić na połowy, a każdą z tak wyodrębnionych części znów podzielić na połowy. Pierwszą z tych części należy wypełnić jedynkami, drugą zerami, trzecią jedynkami, a czwartą znów zerami. Przechodząc do kolumny przeznaczonej dla następnej zmiennej, również należy podzielić ją na połowy, dzieląc je dalej na połowy, a te jeszcze raz na połowy. Tak wyodrębnione części należy wypełnić na przemian zestawami jedynek i zer. Taktyka ta winna być stosowana aż do wypełnienia kolumny przeznaczonej dla ostatniej zmiennej. Zadania tego etapu będą poprawnie wykonane, jeśli w tej właśnie kolumnie wystąpią na przemian jedynki i zera. Zadanie trzeciego etapu należy wykonać w oparciu o stosowne matryce i odpowiednie, poprzednio wypełnione kolumny. Cała tabelka dla badanego tu wyrażenia przedstawia się następująco:

r	q	p	$\sim r$	$\sim q$	$\sim r \equiv q$	$p \rightarrow \sim q$	$(\sim r \equiv q) \vee (p \rightarrow \sim q)$	$r \wedge p$	$[(\sim r \equiv q) \vee (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow (r \wedge p)$
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	0	0

[26/27]

Jak widać, w ostatniej kolumnie występują zarówno jedynki, jak i zera. Przy pewnych wstawieniach za zmienne całe wyrażenie przekształca się więc w zdanie fałszywe. Przeto nie jest ono tezą rachunku zdań.

7. Wybrane tezy rachunku zdań

Jak już wskazano, tez rachunku zdań jest nieskończenie wiele. Z punktu widzenia logiki nie ma tez lepszych i gorszych, podobnie jak nie ma lepszych i gorszych równań matematycznych. Jednakże pewne tezy rachunku zdań jawią się jako szczególnie doniosłe. Przedstawimy tu najważniejsze z nich.

(1) $p \equiv p$

Teza ta nazywa się **zasadą tożsamości**. Swobodnie mówiąc, głosi ona, że każde zdanie jest równoważne z samym sobą. Przykładem zdania powstałego z tej tezy jest wyrażenie następujące: Marcin idzie na wykład wtedy i tylko wtedy, gdy Marcin idzie na wykład.

(2) $p \equiv \sim\sim p$

Teza ta nazywa się **zasadą podwójnego przeczenia**. Swobodnie mówiąc, głosi ona, że każde zdanie jest równoważne zdaniu powstałemu przez podwójne jego zanegowanie. Przykład: Kasia studiuje prawo wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że Kasia nie studiuje prawa.

(3) $\sim (p \wedge \sim p)$

Teza ta nazywa się **zasadą sprzeczności**. Swobodnie mówiąc, wskazuje ona, że dwa zdania wzajem sprzeczne nie są oba prawdziwe. Tedy z dwóch zdań wzajem sprzecznych co najwyżej jedno jest prawdziwe. Zatem przynajmniej jedno z tych zdań jest fałszywe. Przykład: Nie jest tak, że (Poznań leży nad Wartą i Poznań nie leży nad Wartą).

(4) $p \vee \sim p$

Teza ta nazywa się **zasadą wyłączonego środka**. Określenie wywodzi się stąd, że w przypadku dwóch zdań wzajem sprzecznych wyłączona jest jakaś trzecia, środkowa ewentualność. Zasada ta - swobodnie mówiąc - wskazuje, że dwa zdania wzajem **[27/28]** sprzeczne nie są oba fałszywe. Przeto z dwóch zdań wzajem sprzecznych co najwyżej jedno jest fałszywe. Zatem przynajmniej jedno z tych zdań jest prawdziwe. Zasada wyłączonego środka wespół z zasadą sprzeczności prowadzą do wniosku, iż z dwóch zdań wzajem sprzecznych jedno jest prawdziwe, a jedno jest fałszywe. Przykład zdania powstałego z analizowanej tezy: Staś zdał egzamin z prawa rzymskiego lub Staś nie zda egzaminu z prawa rzymskiego.

(5) $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

Teza ta nazywa się **prawem redukcji do absurdu**. Wskazuje ona, że jeśli dane zdanie implikuje swoją negację, to ta negacja owego zdania jest prawdziwa. Przykład: Jeśli (jeżeli Łódź jest stolicą Polski, to Łódź nie jest stolicą Polski), to Łódź nie jest stolicą Polski.

(6) $(p \wedge q) \rightarrow p$

Teza ta nazywa się **prawem symplifikacji**. Głosi ona, że koniunkcja dwóch zdań implikuje pierwsze z tych zdań. Przykład: Jeśli Poznań leży nad Wartą i Śrem leży nad Wartą, to Poznań leży nad Wartą.

(7) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

Teza ta nazywa się **prawem przemienności koniunkcji**. Głosi ona, że koniunkcja pierwszego zdania i drugiego zdania jest równoważna koniunkcji drugiego zdania i pierwszego zdania. Kolejność czynników w koniunkcji okazuje się więc nieistotna. Przykład: Jaskółki są ptakami i niedźwiedzie są ssakami wtedy i tylko wtedy, gdy niedźwiedzie są ssakami i jaskółki są ptakami.

(8) $p \rightarrow (p \vee q)$

Teza ta nazywa się **prawem addycji**. Głosi ona, że każde zdanie implikuje alternatywę, której jest składnikiem. Przykład: Jeżeli Marcin idzie na wykład, to Marcin idzie na wykład lub Michał idzie na wykład.

(9) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

Teza ta nazywa się **prawem przemienności alternatywy**. Głosi ona, że alternatywa pierwszego zdania oraz drugiego zdania jest równoważna alternatywie drugiego zdania oraz pierwszego zdania. Kolejność składników w alternatywie okazuje się więc nieistotna. Przykład: Wykład z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa odbywa się we wtorki lub wykład z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa odbywa się w czwartki wtedy i tylko wtedy, gdy wykład z podstawowych pojęć i metod **[28/29]** prawoznawstwa odbywa się w czwartki lub wykład z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa odbywa się we wtorki.

(10) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

Teza ta nazywa się **pierwszym prawem de Morgana**. Określenie pochodzi od nazwiska XIX-wiecznego matematyka angielskiego, prawo to głosi, że negacja koniunkcji zdań jest równoważna alternatywie negacji tych zdań. Przykład: Nie jest tak, że Maria zdała egzamin z prawa rzymskiego i Maria zdała egzamin z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa wtedy i tylko wtedy, gdy Maria nie zdała egzaminu z prawa rzymskiego lub Maria nie zdała egzaminu z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa.

(11) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

Teza ta nazywa się **drugim prawem de Morgana**. Głosi ona, że negacja alternatywy zdań jest równoważna koniunkcji negacji tych zdań. Przykład: Nie jest tak, że Warta wpada do Wisły lub Prosna wpada do Wisły wtedy i tylko wtedy, gdy Warta nie wpada do Wisły i Prosna nie wpada do Wisły.

(12) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

Teza ta nazywa się **modus ponendo ponens**. To łacińskie określenie można przetłumaczyć jako: sposób przez potwierdzenie potwierdzający. Owa teza głosi, że gdy jedno zdanie implikuje drugie i jest tak, jak stwierdza pierwsze zdanie, to jest też tak, jak stwierdza drugie zdanie. Przykład: Jeśli (jeżeli pada deszcz, to jest mokro i pada deszcz), to jest mokro.

(13) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

Teza ta nazywa się **modus tollendo tollens**, czyli sposób przez zaprzeczenie zaprzeczający. Głosi ona, że gdy jedno zdanie implikuje drugie, i nie jest tak jak stwierdza drugie zdanie, to nie jest tak, jak stwierdza pierwsze zdanie.

(14) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Teza ta nazywa się **prawem Dunsa Szkota**. Określenie pochodzi od imienia średniowiecznego filozofa szkockiego. Teza ta wskazuje, że gdy dane zdanie jest fałszywe, to implikuje ono dowolne zdanie. Przykład: Jeśli Wenecja nie jest stolicą Włoch, to (jeżeli Wenecja jest stolicą Włoch, to Ania jest matką Kasi).

(15) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Teza ta nazywa się **prawem transpozycji**. Głosi ona, że gdy jedno zdanie implikuje drugie, to negacja drugiego zdania implikuje negację pierwszego zdania. Przykład: Jeśli (jeżeli **[29/30]** świeci słońce, to jest dzień), to (jeżeli nie ma dnia, to nie świeci słońce).

(16) $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$

Teza ta nazywa się **prawem przemienności równoważności**. Głosi ona, że równoważność pierwszego zdania z drugim zdaniem jest równoważna równoważności drugiego zdania z pierwszym zdaniem. Miejsce członów w równoważności nie jest więc istotne. Przykład: (Bogdan jest studentem wtedy i tylko wtedy, gdy Bogdan ma indeks) wtedy i tylko wtedy, gdy (Bogdan ma indeks wtedy i tylko wtedy, gdy Bogdan jest studentem).

(17) $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$

Teza ta nazywa się **prawem łączności koniunkcji**. Wskazuje ona na równoważność złożonych koniunkcji, różniących się tylko usytuowaniem czynników. Przykład: W Poznaniu jest uniwersytet oraz (we Wrocławiu jest uniwersytet i w Toruniu jest uniwersytet) wtedy i tylko wtedy, gdy (w Poznaniu jest uniwersytet i we Wrocławiu jest uniwersytet) oraz w Toruniu jest uniwersytet.

(18) $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$

Teza ta nazywa się **prawem łączności alternatywy**. Wskazuje ona na równoważność złożonych alternatyw, różniących się tylko usytuowaniem składników. Przykład: Paryż będzie stolicą Europy lub (Londyn będzie stolicą Europy lub Rzym będzie stolicą; Europy) wtedy i tylko wtedy, gdy (Paryż będzie stolicą Europy lub Londyn będzie stolicą Europy) lub Rzym będzie stolicą Europy.

(19) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

Teza ta nazywa się **prawem rozdzielności koniunkcji względem alternatywy**. Wskazuje ona na równoważność swoiście złożonej koniunkcji ze swoiście złożoną alternatywą. Przykład: Piotr zdał egzaminy i (Piotr wyjechał w góry lub Piotr wyjechał nad morze) wtedy i tylko wtedy, gdy (Piotr zdał egzaminy i Piotr wyjechał w góry) lub (Piotr zdał egzaminy i Piotr wyjechał nad morze).

(20) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Teza ta nazywa się **prawem rozdzielności alternatywy względem koniunkcji**. Wskazuje ona na równoważność swoiście złożonej alternatywy ze swoiście złożoną koniunkcją. Przykład: Czerwiec będzie upalny lub (lipiec będzie upalny i sierpień będzie upalny) wtedy i tylko wtedy, gdy (czerwiec będzie upalny lub **[30/31]** lipiec będzie upalny) i (czerwiec będzie upalny lub sierpień będzie upalny).

(21) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Teza ta nazywa się **prawem komutacji**. Wskazuje ona na równoważność swoiście przekształconych implikacji. Przykład: Jeśli pada deszcz, to (jeżeli grzmi, to jest burza) wtedy i tylko wtedy, gdy jeśli grzmi, to (jeżeli pada deszcz, to jest burza).

(22) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Teza ta nazywa się **prawem eksportacji**. Wskazuje ona, że implikacja o złożonym poprzedniku implikuje implikację o swoiście złożonym następniku. Przykład: Jeśli (jeżeli Andrzej otrzymał zaliczenia i Andrzej zdał egzaminy, to Andrzej zaliczył semestr), to (jeżeli Andrzej otrzymał zaliczenia, to jeżeli Andrzej zdał egzaminy, to Andrzej zaliczył semestr).

(23) $[p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q) \rightarrow r]$

Teza ta nazywa się **prawem importacji**. Wskazuje ona, że implikacja o złożonym następniku implikuje implikację o swoiście złożonym poprzedniku. Przykład: Jeśli (jeżeli wrzesień jest przeokropny, to jeżeli wrzesień jest ciepły, to we wrześniu rośnie wiele grzybów), to (jeżeli wrzesień jest przeokropny, i wrzesień jest ciepły, to we wrześniu rośnie wiele grzybów).

(24) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Teza ta nazywa się **prawem sylogizmu hipotetycznego**.

Głosi ona, że gdy pierwsze zdanie implikuje drugie, a drugie zdanie implikuje trzecie, to pierwsze zdanie implikuje trzecie. Przykład: Jeśli (jeżeli drożeje benzyna, to zwiększają się koszty transportu, i jeżeli zwiększają się koszty transportu, to drożeją towary), to (jeżeli drożeje benzyna, to drożeją towary).

(25) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \rightarrow r$

Teza ta nazywa się **prawem dylematu konstrukcyjnego**. Głosi ona, że gdy jedno zdanie implikuje dane zdanie i drugie zdanie implikuje dane zdanie i jest tak, jak stwierdza pierwsze zdanie lub jest tak, jak stwierdza drugie zdanie, to jest tek, jak stwierdza zdanie implikowane przez każde z owych dwóch zdań. Przykład: Jeśli (jeżeli pada deszcz, to jest mokro i jeżeli pada grad, to jest mokro i pada deszcz lub pada grad), to jest mokro. **[31/32]**

8. Formalizacja rachunku zdań

Metoda zero-jedynkowa pozwala z ogółu wyrażeń rachunku zdań wyróżnić jego tezy. Zabiegu tego można dokonać w inny jeszcze sposób, przeprowadzając **formalizację rachunku zdań**. Operacja ta polega na wyborze pewnych tez rachunku zdań jako aksjomatów i podaniu reguł wyprowadzania z jednych tez innych tez. Pierwszy etap nazywa się **aksjomatyzacja rachunku zdań**. Przeprowadza się go, dobierając określony zestaw tez jako zestaw aksjomatów. Tu oprzemy się na zestawie aksjomatów, który tworzą następujące wyrażenia rachunku zdań:

(A1) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$
(A2) $(\sim p \to p) \to p$
(A3) $p \to (\sim p \to q)$

Pierwszy aksjomat stanowi pewną modyfikację prawa sylogizmu hipotetycznego. Drugi nazywa się prawem Claviusa, zaś trzeci jest modyfikacją prawa Dunsa Szkota. Oczywiście, każdy z nich jest tezą rachunku zdań, o czym łatwo się przekonać za pomocą metody zero-jedynkowej.

Drugi etap formalizacji polega na sprecyzowaniu reguł wyprowadzania z jednych tez innych tez rachunku zdań. Przy tym aksjomaty i reguły muszą być tak dobrane, aby spełniały dwa warunki. Po pierwsze, z aksjomatów za pomocą reguł winny być wyprowadzalne wszystkie tezy rachunku zdań. Po drugie, z aksjomatów za pomocą reguł winny być wyprowadzalne tylko tezy rachunku zdań. Innymi słowy, reguły winny umożliwiać wyprowadzenie z aksjomatów wszystkich i tylko tez rachunku zdań.

Jedną z reguł jest **reguła podstawienia**, która brzmi następująco: jeżeli wyrażenie postaci A jest tezą rachunku zdań, to tezą rachunku zdań jest też wyrażenie postaci B powstałe z A przez konsekwentne podstawienie za występującą w nim zmienną zdaniową dowolnego wyrażenia rachunku zdań. Dodajmy, że podstawienie jest konsekwentne, gdy to samo wyrażenie podstawia się we wszystkich miejscach wyrażenia A, w których występuje dana zmienna. Zilustrujemy zastosowanie tej reguły kilkoma przykładami. Podstawiając w aksjomacie 3 za zmienną „q” zmienną „p”, otrzymujemy wyrażenie

(1) $p \to (\sim p \to p)$

będące tezą rachunku zdań. Podstawiając w aksjomacie 1 za zmienną „q” wyrażenie „$\sim p \to q$”, otrzymujemy wyrażenie **[32/33]**

(2) $[p \to (\sim p \to q)] \to \{[(\sim p \to q) \to r] \to (p \to r)\}$

będące tezą rachunku zdań. Widać tu, że wymóg konsekwentności podstawiania jest niezbędny. Gdyby bowiem w aksjomacie 1 podstawić owo wyrażenie tylko w pierwszym miejscu wystąpienia danej zmiennej, to otrzymalibyśmy wyrażenie „$[p \to (\sim p \to q)] \to [(q \to r) \to (p \to r)]$” nie będące tezą rachunku zdań, o czym łatwo się przekonać za pomocą metody zero-jedynkowej.

Podstawiając w aksjomacie 3 za zmienną „p” wyrażenie „$(\sim p \to p) \to p$”, otrzymujemy wyrażenie

(3) $[(\sim p \to p) \to p] \to \{\sim [(\sim p \to p) \to p] \to q\}$

będące tezą rachunku zdań. Z kolei podstawiając w aksjomacie 1 za zmienną „p” wyrażenie „$\sim p \to p$”, otrzepujemy wyrażenie

(4) $[(\sim p \to p) \to q] \to \{(q \to r) \to [(\sim p \to p) \to r]\}$

będące tezą rachunku zdań. Oczywiście regułę podstawiania wolno stosować nie tylko do aksjomatów, ale do wszelkich tez rachunku zdań. Podstawiając więc w tezie 4 za zmienną „q” zmienną „p”, otrzymujemy wyrażenie

(5) $[(\sim p \to p) \to p] \to \{(p \to r) \to [(\sim p \to p) \to r]\}$

także będące tezą rachunku zdań.

Podstawmy jeszcze w aksjomacie 3 za zmienną „p” wyrażenie „$\sim (p \to \sim r)$”, otrzymując wyrażenie

(6) $\sim (p \to \sim r) \to [\sim \sim (p \to \sim r) \to q]$

będące tezą rachunku zdań. We wszystkich powyższych przykładach za zmienne podstawialiśmy zmienne albo też inne, względnie proste wyrażenia. Reguła podstawiania pozwala jednak na podstawianie za zmienne także bardzo skomplikowanych wyrażeń. Gdy w tezie 6 za zmienną „q” podstawimy wyrażenie „{[(q ∧ s) → s] → ~ [s → (q ∧ s)]”, to otrzymamy już dość skomplikowane wyrażenie

(7) ~ (p → r) → |~ ~ (p → ~ r) -> ~ {[(q ∧ s) → s] → ~ [s → (q ∧ s)]}|

będące tezą rachunku zdań.

Drugą regułą jest **reguła odrywania**, która brzmi następująco: jeżeli wyrażenie postaci A → B jest tezą rachunku zdań i wyrażenie Postaci A jest tezą rachunku zdań, to także wyrażenie postaci S jest tezą rachunku zdań. Zauważmy więc, że teza 2 jest wyrażeniem postaci A → B. Z kolei aksjomat 3 jest identyczny z poprzednikiem tej tezy, a więc jest wyrażeniem postaci A. Odrywając tedy od tezy 2 aksjomat 3 otrzymujemy wyrażenie

(8) [(~ p → q) → r] → (p → r) **[33/34]**

będące tezą rachunku zdań. Również teza 3 jest wyrażeniem postaci A → B, zaś aksjomat 2 jest identyczny z poprzednikiem te tezy, a więc jest wyrażeniem o postaci A. Odrywając przeto od tezy 3 aksjomat 2, otrzymujemy wyrażenie

(9) ~ [(~ p → p) → p] → q

będące tezą rachunku zdań. Wreszcie i teza 5 jest wyrażeniem postaci A → B. Aksjomat 2 jest zaś identyczny z poprzednikiem tej tezy, a więc jest wyrażeniem o postaci A. Odrywając zatem od tezy 5 aksjomat 2, otrzymujemy wyrażenie

(10) (p → r) → (~ p → p) → r]

będące tezą rachunku zdań.

Wreszcie trzecią regułą jest **reguła zastępowania**, która brzmi następująco: jeżeli wyrażenie postaci A jest tezą rachunku zdań to tezą rachunku zdań jest także wyrażenie postaci B powstałe z A przez zastąpienie występującego w A wyrażenia rachunki zdań innym wyrażeniem rachunku zdań odpowiadającym mu na podstawie następujących definicji:

(D1) C ∧ D = ~ (C → ~ D)

(D2) C ∨ D = ~ C → D

(D3) C ≡ D = ~ [(C → D) → ~ (D → C)]

Analizę reguły zastępowania warto rozpocząć od porównania je z regułą podstawiania. Wskażmy, że zachodzą między nimi cc najmniej trzy różnice. Po pierwsze, podstawia się za dowolną zmienną występującą w tezie rachunku zdań. Natomiast zastępuje się jedynie wyrażenie o określonym kształcie występujące w tezie rachunku zdań, na przykład zastępuje się wyrażenie postaci ~ (C → ~ D). Po drugie, za zmienną podstawia się dowolne wyrażenie rachunku zdań. Natomiast dane wyrażenie zastępuje się określonym wyrażeniem, zrównanym z tamtym na podstawie definicji. Na przykład wyrażenie postaci ~ (C → ~ D) zastępuje się wyrażeniem postaci C ∧ D. Po trzecie, podstawia się konsekwentnie, czyli we wszystkich miejscach tezy, w których dana zmienna występuje. Natomiast zastępuje się tylko w jednym miejscu wystąpienia wyrażenia zastępowanego. Gdyby więc w złożonej tezie wyrażenie ~ (C → ~ D) wystąpiło kilka krotnic, to jednorazowe zastosowanie reguły zastępowania upoważnia do zastąpienia tego wyrażenia tylko w jednym z jego wystąpień.

Zilustrujemy zastosowanie tej reguły kilkoma przykładami. Zauważmy, że poprzednik aksjomatu 2 jest wyrażeniem postaci **[34/35]** ~ C → D. Zastępując je, na podstawie definicji 2, wyrażeniem C ∨ D otrzymujemy wyrażenie

(11) (p ∨ p) → p

będące tezą rachunku zdań. Z kolei poprzednik tezy 6 jest wyrażeniem postaci ~ (C → ~ D). Zastępując je, na podstawie definicji 1, wyrażeniem postaci C ∧ D, otrzymujemy wyrażenie

(12) (p ∧ q) → [~ ~ (p → ~ r) → q]

będące tezą rachunku zdań. Jak widać, w wyrażeniu tym również występuje wyrażenie postaci ~ (C → ~ D), stanowiące fragment jego następnika. Zastępując je, na podstawie definicji 1, wyrażeniem postaci C ∧ D otrzymujemy wyrażenie

(13) (p ∧ r) → [~ (p ∧ r) → q]

będące tezą rachunku zdań. Wreszcie, następnik tezy 7 jest wyrażeniem postaci $\sim [(C \rightarrow D) \rightarrow \sim (D \rightarrow C)]$. Zastępując je, na podstawie definicji 3, wyrażeniem postaci $C \equiv D$, otrzymujemy wyrażenie

(14) $\sim (p \rightarrow \sim r) \rightarrow \{\sim \sim (p \rightarrow \sim r) \rightarrow [(q \wedge s) \equiv s]\}$

będące tezą rachunku zdań. Gdy do tezy tej jeszcze dwukrotnie zastosujemy regułę zastępowania, wykorzystując definicję 1, to otrzymamy wyrażenie

(15) $(p \wedge r) \rightarrow \{\sim (p \wedge r) \rightarrow [(q \wedge s) \equiv s]\}$

będące tezą rachunku zdań.

9. Dowodzenie

Aby wykazać, że dane wyrażenie jest tezą rachunku zdań, należy przeprowadzić dowód tego wyrażenia. **Dowodem wyrażenia W, na gruncie aksjomatów l, 2 i 3, w oparciu o reguły podstawiania, odrywania i zastępowania,** jest ciąg wyrażeń rachunku zdań, taki że każde wyrażenie tego ciągu albo jest jednym z aksjomatów 1-3, albo powstaje z wcześniejszego wyrażenia ciągu przez zastosowanie reguły podstawiania, albo powstaje z wcześniejszych wyrażeń ciągu przez zastosowanie reguły odrywania, albo powstaje z wcześniejszego wyrażenia ciągu przez zastosowanie reguły zastępowania, a przy tym ostatnim wyrażeniem tego ciągu jest wyrażenie W. Zabieg konstruowania dowodu danego wyrażenia nazywamy jego **dowodzeniem**. **[35/36]**

Przedstawmy kilka przykładów dowodzenia. Najpierw udowodnimy prawo addycji „$p \rightarrow (p \vee q)$”. Punktem wyjścia jest aksjomat 3

(A3) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$.

Zastąpmy występujące w nim wyrażenie „$\sim p \rightarrow q$” wyrażeniem „$p \vee q$”, w oparciu o definicję 2 reguły zastępowania. Otrzymujemy wyrażenie

(1) $p \rightarrow (p \vee q)$

które jest właśnie dowodzonym prawem addycji. Zatem dowodem owego prawa jest ciąg wyrażeń A3, 1. Pierwszym wyrażeniem ciągu jest aksjomat 3. Drugie wyrażenie ciągu powstaje z pierwszego przez zastosowanie reguły zastępowania. To drugie wyrażenie jest jednocześnie ostatnim wyrażeniem ciągu i jest identyczne z prawem addycji. W powyższym dowodzie wykorzystano wyłącznie aksjomat 3 oraz regułę zastępowania. Dowód ten okazuje się więc nadzwyczaj prosty.

Nieco bardziej skomplikowany jest dowód tezy „$p \rightarrow p$” stanowiącej słabszą postać zasady tożsamości. Dowód zaczyna się od aksjomatu 1

(A1) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$.

Podstawmy w nim za zmienną „q” wyrażenie „$\sim p \rightarrow p$” otrzymując

(2) $[p \rightarrow (\sim p \rightarrow p)] \rightarrow \{[(\sim p \rightarrow p) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Kolejnym składnikiem dowodu jest aksjomat 3

(A3) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$.

Podstawmy w nim w miejsce zmiennej „q” zmienną „p” otrzymując

(3) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow p)$.

Łatwo zauważyć, że wyrażenie to jest identyczne z poprzednikiem 2. Odrywając więc 3 od 2 otrzymujemy

(4) $[(\sim p \rightarrow p) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Podstawiając w tej tezie w miejsce zmiennej „r” zmienną „p” otrzymujemy

(5) $[(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p] \rightarrow (p \rightarrow p)$.

Kolejnym składnikiem dowodu jest aksjomat 2

(A2) $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$.

Łatwo zauważyć, że jest ona identyczna z poprzednikiem 5. Odrywając więc A2 od 5, otrzymujemy dowodzoną tezę

(6) $p \rightarrow p$. **[36/37]**

Jak widać, powyższy dowód jest już dość skomplikowany, bo składa się z ośmiu następujących wyrażeń: A1, 2, A3, 3, 4, 5, A2, 6. Jego pierwszym składnikiem jest aksjomat 1. Następny składnik powstaje z pierwszego przez zastosowanie reguły podstawiania. Kolejnym wyrażeniem ciągu jest aksjomat 3. Następna teza powstaje z wcześniejszego od niej aksjomatu 3 przez zastosowanie reguły podstawiania. Natomiast teza 4 powstaje z wcześniejszych od niej tez 2 i 3 przez zastosowanie reguły odrywania. Z kolei teza 5 powstaje z wcześniejszej od niej tezy 4 przez zastosowanie reguły podstawiania. Kolejnym składnikiem dowodu jest aksjomat 2. Wreszcie teza 6 powstaje z wcześniejszych tez 5 i A2 przez zastosowanie reguły odrywania. Wyrażenie to jest ostatnim składnikiem ciągu i jest ono identyczne z dowodzoną tezą. Jak widać, w dowodzie tym zostały wykorzystane wszystkie trzy aksjomaty oraz trzykrotnie reguła podstawiania i dwukrotnie reguła odrywania.

Udowodnimy teraz zasadę wyłączonego środka, wykorzystując w tym celu dowód przeprowadzony wyżej. W udowodnionej tam tezie „$p \rightarrow p$” podstawmy za zmienną „p” wyrażenie „$\sim p$”. Otrzymujemy wówczas

(7) $\sim p \rightarrow \sim p$.

Zastąpmy całą tę tezę wyrażeniem „$p \vee \sim p$”, w oparciu o definicję 2 reguły zastępowania. Otrzymujemy tezę

(8) $p \vee \sim p$

będącą właśnie dowodzoną zasadą wyłączonego środka. Cały dowód składa się więc z następujących wyrażeń: A1, 2, A3, 3, 4, 5, A2, 6, 7, 8. Tworzą go aksjomaty A1, A3 i A2. Tworzą go też tezy 2, 3, 5 i 7 otrzymane z wcześniejszych od nich składników ciągu za pomocą reguły podstawiania. Nadto, tworzą go tezy 4 i 6 otrzymane z wcześniejszych składników ciągu za pomocą reguły odrywania. Wreszcie kończy dowód teza 8 otrzymana z wcześniejszej tezy za pomocą reguły zastępowania. Właśnie teza 8 stanowi dowodzoną zasadę wyłączonego środka.

Dotąd dowodziliśmy wyrażeń, o których już wcześniej było wiadomo, że są tezami rachunku zdań. Udowodnimy teraz wyrażenie „$[(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)] \rightarrow [p \rightarrow (r \wedge s)]$”, o którym nie wiemy jeszcze, że jest tezą rachunku zdań. Początek dowodu stanowi aksjomat 1

(A1) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$. **[37/38]**

Podstawiając w nim za zmienną „q” wyrażenie „$\sim p \rightarrow q$” otrzymujemy

(9) $[p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)] \rightarrow \{[(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)\}$.

Kolejnym składnikiem dowodu jest aksjomat 3

(A3) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Łatwo zauważyć, że aksjomat ten jest identyczny z poprzednikiem 9. Odrywając A3 od 9 otrzymujemy

(10) $[(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Zastępując w nim wyrażenie „$\sim p \rightarrow q$” wyrażeniem „$p \vee q$” w oparciu o definicję 2 reguły zastępowania, otrzymujemy tezę

(11) $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Podstawiając w niej za zmienną „r” wyrażenie „$\sim (r \rightarrow \sim s)$” otrzymujemy tezę

(12) $[(p \vee q) \rightarrow \sim (r \rightarrow \sim s)] \rightarrow [p \rightarrow \sim (r \rightarrow \sim s)]$.

Zastępując w jej poprzedniku wyrażenie „$\sim (r \rightarrow \sim s)$” wyrażeniem „$r \wedge s$”, w oparciu o definicję 1 reguły zastępowania otrzymujemy

(13) $[(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)] \rightarrow [p \rightarrow \sim (r \rightarrow \sim s)]$.

Zastępując w jego następniku wyrażenie „$\sim (r \rightarrow \sim s)$” wyrażeniem „$r \wedge s$”, w oparciu o tę samą definicję 1 reguły zastępowania, otrzymujemy dowodzoną tezę

(14) $[(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)] \rightarrow [p \rightarrow (r \wedge s)]$.

Powyższy dowód składa się więc z następujących wyrażeń: A1, 9, A3, 10, 11, 12, 13, 14. Pierwsze z nich jest aksjomatem. Drugie powstaje z pierwszego przez zastosowanie reguły podstawiania. Trzecie też jest aksjomatem. Z kolei teza 10 powstaje z wcześniejszych składników 9 i A3 przez zastosowanie reguły odrywania. Kolejny składnik, jakim jest teza 11, powstaje z wcześniejszej tezy 10 przez zastosowanie reguły zastępowania. Natomiast teza 12 powstaje z 11 przez zastosowanie reguły podstawiania. Wreszcie tezy 13 i 14 powstają z wcześniejszych od nich składników przez zastosowanie reguły zastępowania. Ostatnie z tych wyrażeń stanowi właśnie dowodzoną tezę.

Jak widać, dowody bywają mniej i bardziej skomplikowane. Pierwszy z podanych tutaj dowodów był nadzwyczaj prosty. Pozostałe były już nieco bardziej złożone. A jednak, w gruncie rzeczy, wszystkie je należy uznać za stosunkowo proste, gdy wziąć pod uwagę, że bywają dowody składające się z bardzo wielu wyrażeń. Częstokroć można też przeprowadzić kilka dowodów, **[38/39]** iż dane wyrażenie jest tezą. Wówczas zazwyczaj przeprowadza się ten spośród nich, który jest najprostszy.

Podane poprzednio określenie dowodu odwoływało się do aksjomatów 1-3 i reguł podstawiania, odrywania i zastępowania, jednakże już rachunek zdań może być oparty na rozmaitych zestawach aksjomatów. Inne rachunki logiczne oparte są na odmiennych aksjomatach, wprowadzają też dodatkowe reguły dowodowe. Wszystko to uwzględnia uogólnione określenie dowodu, wedle którego dowodem wyrażenia W, na gruncie aksjomatów tworzących zbiór A, w oparciu o reguły tworzące zbiór R, jest taki ciąg wyrażeń, że każde wyrażenie tego ciągu albo jest jednym z aksjomatów zbioru A, albo powstaje z wcześniejszych wyrażeń tego ciągu przez zastosowanie którejś z reguł zbioru R, a przy tym ostatnim wyrażeniem tego ciągu jest wyrażenie W. Podane poprzednio określenie dowodu jest uszczegółowieniem powyższego określenia.

ZADANIA

1. Wskaż, które z następujących wyrażeń są zdaniami w sensie logicznym:
a) Nauczyciel nakazał uczniom zapytać ich rodziców, czy zechcą sfinansować wycieczkę klasy nad morze,
b) Dlaczego odpisujesz wykłady od tego kolegi, o którym wiesz, że notuje niestarannie,
c) Gdy prowadzony jest wykład z logiki niech nikt nie wchodzi na salę wykładową,
d) Maria jutro będzie zdawać egzamin z prawa rzymskiego,
e) Niech Jan nie prosi kolegi o pożyczkę pieniężną,
f) Studenci wielokrotnie dopytywali wykładowcę o pytania egzaminacyjne z logiki.

2. Wskaż, które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe:
a) W swych „Kronikach” Jan Długosz wspomina o obronie Częstochowy przed Szwedami,
b) Istnieją tylko takie obiekty, o których nie da się zaprzeczyć, że nie istnieją,
c) Jeżeli ojcowie są młodsi od swoich synów, to synowie są starsi od swoich ojców,
d) Wielu Polaków nie wie, że stolicą Szwajcarii jest Lozanna,
e) (Niektórzy niscy studenci są wyżsi od wyrośniętych przedszkolaków) wtedy i tylko wtedy, gdy (nie jest tak, że syn żony ojca Jana III Sobieskiego nie przegrał bitwy pod Wiedniem),
f) Jeżeli (jedna cegła waży l kg i pół cegły, a waga półtorej cegły jest mniejsza od dwukrotności wagi jednej cegły), to (połowa wagi dwóch cegieł jest większa od wagi półtorej cegły lub jedna cegła waży 2 kg). **[39/40]**

3. Ustal, z jakich wyrażeń rachunku zdań powstały następujące zdania:
a) Nie jest tak, że {jeśli (Piotr idzie na wykład wtedy i tylko wtedy, gdy Piotr niesie notatnik) to, [nie jest tak, że (Piotr nie idzie na wykład)]},
b) Antek wie, że [Tomek myśli, że (Antek nie zda egzaminu z logiki lub Antek nie zda egzaminu ze wstępu do prawoznawstwa)],
c) (Poznań leży nad Wisłą lub Jarocin leży nad Wisłą) wtedy i tylko wtedy, gdy (Jarocin nie jest miastem portowym),
d) [(Kasia nie spóźnia się na wykłady) i (Bronek nie spóźnia się na wykłady)], a (Zosia nie spóźnia się na wykłady wtedy i tylko wtedy, gdy Kasia spóźnia się na wykłady),
e) [(Francja jest większa od Belgii) a (Hiszpania jest mniejsza od Szwecji lub Szwecja jest równa Hiszpanii)], natomiast (Portugalia nie jest większa od Grecji),
f) (Każdy uniwersytet jest szkołą wyższą, o czym wie każdy student), a (żadna spółka jawna nie ma osobowości prawnej, o czym wiedzą tylko niektórzy prawnicy).

4. Wskaż, które z podanych niżej sekwencji są wyrażeniami rachunku zdań:
a) $(q \wedge r) = [(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \vee r)]$
b) $\sim \sim \sim \sim p \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow q$
c) $(r \equiv \sim r) \equiv [(\sim q \equiv q) \equiv (p \equiv \sim p)]$
d) Marian wie, że $[(p \vee \sim q) \equiv (\sim p \rightarrow q)]$

e) $[(p \rightarrow r) \vee \sim (q \wedge \sim p)] \vee \sim [(\sim s \rightarrow q) \equiv (t \wedge s)]$
f) $(p \wedge q \wedge r) \equiv (p \wedge q \wedge r)$

5. Wykaż, że następujące sekwencje są wyrażeniami rachunku zdań:
a) $p \vee \sim p$
b) $(q \equiv p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$
c) $[(\sim p \wedge q) \wedge \sim q] \vee [q \wedge (\sim p \wedge q)]$
d) $\sim \{[(p \rightarrow \sim q) \equiv p] \wedge [\sim (\sim q \vee p) \equiv q]\}$
e) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [\sim r \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)]$
f) $\{r \wedge \sim [(p \rightarrow \sim q) \vee \sim (\sim r \equiv p)]\} \vee \sim p$

6. Sprawdź metodą 0-1, które z następujących wyrażeń są tezami rachunku zdań:
a) $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
b) $[q \vee (p \rightarrow r)] \equiv [\sim r \equiv (p \rightarrow \sim q)]$
c) $[(\sim r \vee \sim p) \rightarrow (q \equiv r)] \wedge (p \vee q)$
d) $[(r \equiv q) \wedge (\sim q \rightarrow p)] \vee [(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \vee r)]$
e) $[(q \wedge \sim p) \rightarrow r] \equiv \sim [(p \vee r) \wedge \sim (r \equiv q)]$
f) $[(p \vee q) \equiv \sim (r \wedge \sim s)] \rightarrow [(\sim p \equiv q) \vee s]$

7. Wyprowadź z tez grupy a tezy grupy b za pomocą reguły podstawiania:
a) $(q \vee r) \vee \sim (q \wedge r)$, $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \equiv p) \vee (\sim p \equiv q)]$,
$[\sim p \vee (r \equiv r)] \wedge [(\sim r \equiv \sim r) \vee q]$, $\sim [(q \equiv \sim p) \wedge \sim (q \equiv \sim p)]$,
$(r \wedge \sim p) \equiv \sim (\sim r \vee \sim p)$, $(p \vee q \vee r) \rightarrow (r \vee p \vee q)$
b) $\{[\sim r \equiv (q \wedge p)] \vee r\} \vee \sim \{[\sim r = (q \wedge p)] \wedge r\}$, $(q \vee r \vee p) \rightarrow (p \vee q \vee r)$,
$\sim \{[(r \vee s) \equiv \sim (r \rightarrow s) \wedge \sim [(r \vee s) \equiv \sim (r \rightarrow s)]\}$,
$[(p \rightarrow q) \wedge (r \vee q)] \equiv \sim [\sim (p \rightarrow q) \vee \sim (r \vee q)]$, $(r \rightarrow r) \rightarrow [(r \equiv r) \vee (\sim r \equiv r)]$,
$[\sim (s \rightarrow r) \vee (r \equiv r)] \wedge [(\sim r \equiv \sim r) \vee (q \wedge \sim s)]$
[40/41]
8. Wyprowadź z tez grupy a tezy grupy b za pomocą reguły odrywania:
a) $(q \equiv q) \rightarrow \sim (\sim p \wedge p)$, $(r \vee \sim r) \rightarrow \{(r \vee \sim r) \rightarrow [q \rightarrow (p \vee q)]\}$, $(q \equiv q)$,
$(p \wedge \sim q) \rightarrow p$, $(p \rightarrow p) \rightarrow \{r \vee \sim r) \rightarrow [\sim (\sim p \wedge p) \rightarrow (\sim q \vee q)]\}$,
$[(p \wedge \sim q) \rightarrow p] \rightarrow (r \vee \sim r)$, $[q \rightarrow (p \vee q)] \rightarrow \{[(\sim r \wedge q) \equiv (q \wedge \sim r)] \rightarrow (p \rightarrow p)\}$,
$\sim (\sim p \wedge p) \rightarrow \{(q \equiv q) \rightarrow [(\sim r \wedge q) \equiv (q \wedge \sim r)]\}$,
b) $\sim (\sim p \wedge p)$, $(r \vee \sim r)$, $p \rightarrow p)$, $\sim q \vee q$, $(\sim r \wedge q) \equiv (q \wedge \sim r)$, $q \rightarrow (p \vee q)$

9. Wyprowadź z tez grupy a tezy grupy b za pomocą reguły zastępowania:
a) $(q \equiv \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$, $\sim (r \rightarrow \sim p) \vee (p \rightarrow \sim r)$, $\sim (r \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$,
$\sim [\ \sim (p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \wedge p)]$, $(p \vee r) \equiv (r \vee p)$,
$\sim \{[\sim (p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow [\sim (p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim (p \rightarrow \sim q)]\}$
b) $(r \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$, $(r \wedge p) \vee (p \rightarrow \sim r)$, $(q \equiv \sim q) \rightarrow (p \vee q)$, $(p \wedge q) \equiv (p \wedge q)$,
$\sim [(p \wedge q) \wedge \sim (\sim q \rightarrow \sim p)]$, $\sim \{[(p \vee r) \rightarrow (r \vee p) \rightarrow \sim [(r \vee p) \rightarrow (p \vee r)]\}$

10. Spróbuj udowodnić następujące tezy:

a) $(q \vee r) \rightarrow [\sim (\sim q \rightarrow r) \rightarrow q]$ (wykorzystaj aksjomat 3, zastosuj regułę podstawiania, a następnie regułę zastępowania - definicje 2),

b) $[(r \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow \sim q)] \rightarrow [r \rightarrow \sim q)$ (wykorzystaj aksjomat 2, zastosuj regułę podstawiania, a następnie regułę zastępowania - definicję 1),

c) [p → (~ p → q) ∨ q (wykorzystaj udowodnioną już tezę 1 z punktu 9, zastosuj regułę podstawiania, a następnie do tego, co otrzymałeś i do aksjomatu 3 zastosuj regułę odrywania),

d) [(p → q) → ~ (q → p) ∨ (p ≡ q) (wykorzystaj udowodnioną już tezę 8 z punktu 9, zastosuj regułę podstawiania, a następnie regułę zastępowania - definicję 3),

e) (p ∨ ~ p) ∨ q (wykorzystaj aksjomat 3, zastosuj regułę podstawiania, następnie zastosuj regułę odrywania odrywając od tego, co otrzymałeś udowodnioną już tezę 8 z punktu 9, na zakończenie zastosuj regułę zastępowania definicyjnego - definicję 2),

f) [(p ∨ q) → (p ∧ q)] → [p → (p ∧ q)] (wykorzystaj aksjomat 1, zastosuj regułę podstawiania, następnie zastosuj regułę odrywania i od tego, co otrzymałeś poprzednio oderwij udowodnioną już tezę 1 z punktu 9, na zakończenie zastosuj ponownie regułę podstawiania). **[40/41]**

II. WPROWADZENIE DO RACHUNKU PREDYKATÓW

1. Terminy jednostkowe

Rozważmy bliżej zdanie „Jeżeli Michał zda wszystkie egzaminy, to najstarszy brat nie skarci go, a ojciec zafunduje mu wycieczkę do Włoch”. W zdaniu tym występują znane nam już wyrażenia „jeżeli to”, „nie” oraz „a”. Wstawiając za nie ich logiczne odpowiedniki, otrzymujemy zdanie „Michał zda wszystkie egzaminy → [~ (najstarszy brat skarci go) ∧ ojciec zafunduje mu wycieczkę do Włoch]”. Jak widać, zdanie to jest implikacją o następniku mającym postać koniunkcji, której pierwszy czynnik stanowi negacja. Używając wyrażeń z rachunku zdań, możemy jeszcze co najwyżej zastąpić poszczególne argumenty stosownymi zmiennymi zdaniowymi. Otrzymamy wówczas wyrażenie „p → (~ q ∧ r)”. Środki wypracowane w ramach rachunku zdań nie pozwalają już dokładniej zanalizować zdań: „Michał zda wszystkie egzaminy”, „Najstarszy brat skarci go” oraz „Ojciec zafunduje mu wycieczkę do Włoch” występujących w owym złożonym zdaniu. Wnikliwą ich analizę można przeprowadzić na gruncie innego działu logiki rachunku predykatów.

Zauważmy więc, że w rozważanym tu zdaniu występuje wyraz „Michał” będący **imieniem własnym** pewnego studenta. Imionami własnymi są również takie wyrażenia jak: „Henryk Sienkiewicz”, „Poznań”, „Warta”, „Rzeczpospolita Polska”, „9”, „Andrzej Kmicic”, „Apollo”, „Burek” itp. Każde z nich znamionuje to, że ma ono za zadanie oznaczać jakieś indywiduum, w celu wyróżnienia go spośród innych obiektów. Stąd też każde z nich oznacza tylko jakiś jeden obiekt. Pewne z nich, jak np. „Henryk Sienkiewicz”, „Poznań” czy „Warta”, oznaczają obiekty fizykalne. Inne, jak „Rzeczpospolita Polska” czy „9”, oznaczają obiekty **[42/43]** abstrakcyjne. Jeszcze inne, jak „Andrzej Kmicic” czy „Apollo”, oznaczają obiekty fikcyjne. Mogłoby się wydawać, że różni się od nich słowo „Burek”, bo wabi się tak wiele psów. Zauważmy jednak, że w każdym konkretnym przypadku słowo to funkcjonuje jako miano wyróżniające jednego tylko psa, a więc również jest ono imieniem własnym. W rachunku predykatów, który jest wysoce abstrakcyjną konstrukcją, nie używa się jednak imion własnych zaczerpniętych z języka polskiego, czy jakiegokolwiek innego języka naturalnego. W rachunku tym jako imion własnych używa się wyrażeń: „a”, „b”, „c”, „a_1”, „a_2”, „a_3”, „b_1”, „b_2” itd. Przyjmuje się, że wyrażeń tych jest nieskończenie wiele, a pośród nich są również wymieniane wyżej imiona własne z języka polskiego. Oczywiście, imiona własne używane w rachunku predykatów różnią się kształtem od np. słowa „Michał”, ale z logicznego punktu widzenia różnica ta jest absolutnie nieistotna i dlatego może być pominięta.

Wracając do rozważanego tu zdania zauważmy, że imię własne „Michał” jawnie występuje w nim tylko jeden raz, a mianowicie w początkowym fragmencie jego poprzednika. Jednakże ukrycie wyrażenie to występuje w nim jeszcze kilkakrotnie. Po pierwsze, kryje się ono za słowem „go”, bo to właśnie Michał byłby owym ewentualnie karconym przez brata podmiotem. Po drugie, kryje się ono za słowem „mu”, bo to właśnie Michałowi ojciec ewentualnie zafunduje ową atrakcyjną wycieczkę. Po trzecie, kryje się ono po wyrażeniu „najstarszy brat”, gdyż chodzi tu o najstarszego brata Michała. Wreszcie po czwarte, kryje się ono także po słowie „ojciec”, gdyż chodzi tu o ojca Michała. Po ujawnieniu wszystkich tych wystąpień otrzymujemy zdanie „Jeżeli Michał zda wszystkie egzaminy, to najstarszy brat Michała nie skarci Michała, a ojciec Michała zafunduje Michałowi wycieczkę do Włoch”.

W zdaniu tym występuje także wyrażenie „ojciec Michała” będące taką charakterystyką, która odnosi się tylko do jednej osoby, gdyż każdy człowiek, a więc również i Michał, ma tylko Jednego ojca. W zdaniu tym występuje też wyrażenie „Najstarszy brat Michała” będące taką charakterystyką, która odnosi się do co najwyżej jednej osoby, gdyż każdy człowiek, a więc również Michał, ma co najwyżej jednego najstarszego brata. Wyrażenie będące charakterystyką odnoszącą się do co najwyżej jednego obiektu, które przeto oznacza co najwyżej jeden obiekt, nazywamy **[43/44] deskrypcją.** Zatem wyrażenia „ojciec Michała” i „najstarszy brat Michała” są deskrypcjami. Są nimi również takie wyrażenia jak „ostatni król Polski”, „autor Trylogii”, „największy podzielnik 100”, „granica między Rzeczpospolitą Polską a Republiką Federalną Niemiec” itp. Natomiast nie jest deskrypcją wyrażenie „dziadek Michała”, bo Michał, jak każdy inny człowiek, ma aż dwóch dziadków. Nie jest też deskrypcją wyrażenie „liczba większa od 50”, bo charakterystyka ta odnosi się do bardzo wielu obiektów.

Imiona własne oraz deskrypcje nazywa się ogólnie **terminami jednostkowymi**. Zatem terminami jednostkowymi są takie wyra żenią jak „Piotr”, „Stefan Batory”, „Kraków”, „Prosna”, „Giewont”, bo są to imiona własne. Terminami jednostkowymi są też takie wyrażenia, jak „najmłodszy syn Kazimierza Jagiellończyka”, „najwyższy student pierwszego roku prawa”, „matka Adama Mickiewicza”, „hymn Polski”, bo są to deskrypcje.

2. Funktory

Przyjrzyjmy się teraz bliżej wyrażeniu „ojciec Michała”. Jak już wskazano, wyrażenie to jest terminem jednostkowym. Występuje w nim słowo „Michał”, które również jest terminem jednostkowym. Nadto występuje w nim słowo „ojciec”, które ma tę właściwość, że po dołączeniu do niego terminu jednostkowego daje termin jednostkowy. Wyrażenia tego typu nazywamy funktorami jednoargumentowymi. Inaczej mówiąc **funktorem jednoargumentowym** nazywamy takie wyrażenie, które z jednym terminem jednostkowym daje termin jednostkowy. Funktoram jednoargumentowymi są takie wyrażenia, jak wspomniane już słowo „ojciec”, a także „matka”, „ostatni król”, „autor”, „największy podzielnik”, „najmłodszy syn” itp. Termin jednostkowy”, z którego dany funktor tworzy nawy termin jednostkowy, nazywamy argumentem owego funktora. W wyrażeniu „matka Adama Mickiewicza” argumentem funktora „matka” jest termin jednostkowy „Adam Mickiewicz”. W wyrażeniu „ostatni kro Polski” argumentem funktora „ostatni król” jest termin jednostkowy „Polska”. **[44/45]**

Ponieważ argumentami funktorów mogą być nie tylko imiona własne, ale również deskrypcje, dlatego także wyrażenie „ostatni król Polski” nadaje się do pełnienia roli takiego argumentu. Dołączając go do funktora „ojciec”, otrzymujemy termin jednostkowy „ojciec ostatniego króla Polski”. Dołączając z kolei to wyrażenie do funktora „ojciec”, otrzymujemy wyrażenie „ojciec ojca ostatniego króla Polski” będące również terminem jednostkowym. Dołączając je do funktora „matka”, otrzymujemy bardzo już złożony termin jednostkowy „matka ojca ojca ostatniego króla Polski” oznaczający jedną z prababek Stanisława Augusta Poniatowskiego.

Z kolei **funktorem dwuargumentowym** nazywamy takie wyrażenie, które z dwoma terminami jednostkowymi daje termin jednostkowy. Funktorami dwuargumentowymi są takie wyrażenia, jak „granica między...a”, „ostatni spór między...a”, „ + ”, „log” itp. Wyrażenie „granica między...a” z terminami jednostkowymi „Rzeczpospolita Polska” i „Republika Federalna Niemiec” daje termin jednostkowy „granica między Rzeczpospolitą Polską a Republiką Federalną Niemiec”. Podobnie, wyrażenie „ + ” z terminami jednostkowymi „2” i „3” daje termin jednostkowy „2 + 3”. Terminy jednostkowe dołączone do tych funktorów są ich argumentami. Można też tworzyć funktory trój-, cztero- i więcej argumentowe. Ogólnie mówiąc, **funktorem n-argumentowym** nazywamy takie wyrażenie, które z n-tką terminów jednostkowych daje termin jednostkowy.

W rachunku predykatów funktorami jednoargumentowymi są wyrażenia „f^1”, „g^1”, „h^1”, „f^1_1”, „f^1_2”, „f^1_3”, „g^1_1”, „g^1_2”, itd. Indeks „1” u góry wskazuje, że dany funktor jest funktorem jednoargumentowym. Z kolei funktorami dwuargumentowymi są wyrażenia: „f^2”, „g^2”, „h^2”, „f^2_1”, „f^2_2”, „f^2_3”, „g^2_1”, „g^2_2” itd. Indeks „2” u góry wskazuje, że dany funktor jest dwuargumentowy. Ogólnie, w rachunku predykatów funktorami n-argumentowymi są wyrażenia: „f^n”, „g^n”, „h^n”, „f^n_1”, „f^n_2”, „f^n_3”, „g^n_1”, „g^n_2” itd. Indeks „n” u góry wskazuje, że dany funktor jest n-argumentowy. Gdy nie ma wątpliwości co do ilości argumentów danego funktora, pomija się indeks górny. Piszemy więc „f(a)”, bo widać, że funktor „f” jest tu jednoargumentowy. Podobnie, piszemy „g(a,b)”, bo widać, że funktor „g” jest tu dwuargumentowy. Przyjmuje się, że funktorów każdego rodzaju **[45/46]** jest nieskończenie wiele, a pośród nich są również przytaczane wyżej funktory z języka polskiego.

3. Zmienne indywiduowe

W rachunku predykatów występują zmienne zdaniowe a nadto jeszcze zmienne indywiduowe. **Zmienną indywiduową** jest takie wyrażenie, za które wolno wstawiać dowolny termin jednostkowy. Jako zmiennych indywiduowych używa się wyrażeń: „x”, „y”, „z”, „x’”, „x’’”, „x^1”, „x^2”, „x^3”, „y^1”, „y^2” itd. Ze zmiennymi indywiduowymi zetknęliśmy się już w szkole podstawowej. W wyrażeniu „2 + x = 5” występuje właśnie zmienna indywiduową „x”. Wstawiając za nią termin jednostkowy 3, otrzymujemy prawdziwe zdanie „2 + 3 = 5”, wstawiając zaś termin jednostkowy „6” otrzymujemy fałszywe zdanie „2 + 6 = 5”. Podobnie w wyrażeniu „x leży nad y” występują zmienne indywiduowe „x” oraz „y”. Wstawiając za nie terminy jednostkowe „Poznań” i „Warta”, otrzymujemy zdanie „Poznań leży nad Wartą”. Wstawiając zaś za owe zmienne wyrażenia „Gdańsk” i „Bałtyk”, otrzymujemy zdanie „Gdańsk leży nad Bałtykiem”. Również w wyrażeniu „x jest większe od z” występują zmienne indywiduowe „x” oraz „z”. Wstawiając za te zmienne terminy jednostkowe „Gniezno” i „Września”, otrzymujemy zdania „Gniezno jest większe od Wrześni”. Wstawiając zaś za nie wyrażenia „7” i „9”, otrzymujemy zdanie „7 jest większe od 9”. Warto dodać, że wedle niektórych opinii również zaimki „ja”, „ty”, czy „on” są swoistymi zmiennymi indywiduowymi języka polskiego. Ich swoistość polega na tym, że w mniejszym lub większym stopniu ograniczają wyrażenia, które wolno za nie wstawiać. Na przykład, za występujący w wyrażeniu „On widzi, że ja spaceruję” zaimek „on” wolno wstawiać tylko terminy jednostkowe oznaczające podmioty rodzaju męskiego, zaś za zaimek „ja” wolno wstawić tylko termin jednostkowy oznaczający osobę, która wyrażenie to wypowiada.

Jeżeli w danym wyrażeniu występuje kilka różnych zmiennych indywiduowych, to za każdą z nich wolno wstawiać dowolne terminy jednostkowe. Za daną zmienną wolno więc wstawić **[46/47]** termin jednostkowy różny od tych terminów jednostkowych, jakie wstawiono za pozostałe zmienne indywiduowe występujące w danym wyrażeniu. Na przykład, w wyrażeniu „x jest większe od z” za zmienną „x” wstawiliśmy wyżej „Gniezno”, a za zmienną „z” wstawiliśmy wyżej „Września”. Ponieważ jednak za daną zmienną indywiduową wolno wstawiać dowolne terminy jednostkowe, dlatego za różne zmienne wolno także wstawić ten sam termin jednostkowy. Na przykład, za zmienne „x” oraz „z” występujące w powyższym wyrażeniu wolno wstawić również ten sam termin jednostkowy. Wstawiając za obie te zmienne wyraz „Gniezno”, otrzymujemy poprawne, aczkolwiek fałszywe zdanie „Gniezno jest większe od Gniezna”.

O ile za różne zmienne indywiduowe wolno wstawić ten sam termin jednostkowy, o tyle za jedną zmienną występującą w danym wyrażeniu kilkakrotnie nie wolno w różnych miejscach wstawiać różnych terminów jednostkowych. Wstawianie musi być bowiem konsekwentne, co znaczy, że za tę samą zmienną występującą w danym wyrażeniu kilkakrotnie należy wszędzie „wstawić ten sam termin Jednostkowy. Przeto za zmienną „y” występującą w wyrażeniu „y + y jest większe od y” należy wszędzie wstawić ten sam termin jednostkowy. Wstawiając za ową zmienną „5”, otrzymujemy wyrażenie „5 + 5 jest większe od 5”. Podobnie w wyrażeniu „x jest identyczne z x” za zmienną „x” należy dwukrotnie wstawić ten sam termin jednostkowy. Poprawne jest więc wstawienie prowadzące do wyrażenia „Polska jest identyczna z Polską”. Natomiast niepoprawne, bo niekonsekwentne, byłoby wstawienie na pierwszym miejscu wyrazu „Polska”, a na drugim miejscu wyrazu „Włochy”, co prowadziłoby do wyrażenia „Polska jest identyczna z Włochami”.

Wydawać by się mogło, że w zdaniu „Jeżeli Michał zda wszystkie egzaminy, to najstarszy brat Michała nie skarci Michała, a ojciec Michała zafunduje Michałowi wycieczkę do Włoch” nie występują zmienne indywiduowe. Zauważmy jednak, że Poprzednik tej implikacji, jakim jest zdanie „Michał zda wszystkie egzaminy”, głosi w gruncie rzeczy tyle, co „dla każdego czegoś, jeśli to coś jest egzaminem, to Michał zda to coś”. Otóż właśnie wyraz „coś” pełni tu rolę zmiennej indywiduowej. Zastępując go zmienną „x”, otrzymujemy zdanie „dla każdego x (Jeśli x jest egzaminem, to Michał zda x)”. Po wprowadzeniu tej całe rozważane tu zdanie brzmi następująco „Jeżeli dla **[47/48]** każdego x (jeśli x jest egzaminem, to Michał zda x), to najstarszy brat Michała nie skarci Michała, a ojciec Michała zafunduje Michałowi wycieczkę do Włoch”.

Dla dalszych wywodów konieczne jest wprowadzenie tu pewnego technicznego pojęcia z rachunku predykatów, a mianowicie pojęcia **termu**. Otóż, 1) każda zmienna indywiduowa jest termem i każde imię własne jest termem, 2) jeżeli wyrażenia $w_1,...,w_n$ są termami, to termem jest także wyrażenie $f^n{}_k(w_1,..., w_n)$ (dla każdego k). Zatem w rachunku predykatów termami są wszystkie zmienne indywiduowe „x”, „y”, „z”, itd. i wszystkie imiona własne „a”, „b”, „c” itd. Termami są również wyrażenia: „f(a)”, „f(b)”, „f(c)”, „f(x)”, „f(y)”, „g(a)”, „g(z)”, „g[f(a)]”, „f(a,b)”, „f(a,y)”, „f[f(a),g(x)]”, „g(x,z)”, „h{f[g(b)],y}”, itd. W języku polskim termami byłyby wszystkie zmienne indywiduowe i wszystkie imiona własne oraz takie wyrażenia, jak „ojciec Michała”, „ojciec x-a”, „ojciec matki Jana III Sobieskiego”, „autor Roty”, „matka autora y-a” itd.

4. Predykaty

W rozważanym zdaniu o egzaminach Michała występują jeszcze i takie wyrażenia jak „jest egzaminem”, „zda”, „skarci” oraz „zafunduje wycieczkę do” będące predykatami. Otóż **predykatem jednoargumentowym** nazywamy takie wyrażenie, które z jednym terminem jednostkowym daje zdanie. Predykatem jednoargumentowym jest na przykład wyrażenie „śpi”. Z terminem jednostkowym „Staś” daje bowiem ono zdanie „Staś śpi”. Predykatami jednoargumentowymi są również wyrażenia „spaceruje”, „rozmyśla”, „jest studentem”, „jest liczbą naturalną”, „uczy się pilnie”, „jest egzaminem” itp. Termin jednostkowy, z którym taki predykat daje zdanie, nazywa się jego argumentem. Zatem w zdaniu „Staś śpi” wyraz „Staś” jest argumentem predykatu „śpi”. Z kolei **predykatem dwuargumentowym** nazywamy takie wyrażenie, które z dwoma terminami jednostkowymi daje zdanie. Predykatem dwuargumentowym jest na przykład wyrażenie „jest bratem”. Z terminami jednostkowymi „Piotr” i „Paweł” daje ono bowiem zdanie „Piotr jest bratem Pawła”. Oba terminy jednostkowe stanowią tu argumenty rzeczonego **[48/49]** predykatu. Predykatami dwuargumentowymi są również takie wyrażenia, jak „tańczy z”, „mieszka z”, „jest silniejszy od”, zda”, „skarci” itp. Predykatem trójargumentowym nazywamy zaś takie wyrażenie, które z trzema terminami jednostkowymi daje zdanie. Predykatem trójargumentowym jest na przykład wyrażenie „leży między...a”, bo z wyrazami „Poznań”, „Warszawa” i „Berlin” daje zdanie „Poznań leży między Warszawą a Berlinem”. Dołączone do tego predykatu terminy jednostkowe są jego argumentami. Predykatami trójargumentowymi są również takie wyrażenia, jak „rozstrzyga spór między...a”, „zafunduje wycieczkę do” itp. Ogólnie możemy powiedzieć, że **predykatem n-argumentowym** jest takie wyrażenie, które z n-tką terminów jednostkowych daje zdanie.

W rachunku predykatów predykatami jednoargumentowymi są wyrażenia: „P^1, „R^1”, „S^1”, „$P^1{}_1$”, „$P^1{}_2$”, „$P^1{}_3$”, „$R^1{}_1$”, „$R^1{}_2$”, itd. Indeks „1” u góry wskazuje, że dany predykat jest jednoargumentowy. Z kolei predykatami dwuargumentowymi są wyrażenia: „P^2, „R^2”, „S^2”, „$P^2{}_1$”, „$P^2{}_2$”, „$P^2{}_3$”, „$R^2{}_1$”, „$R^2{}_2$”, itd. Indeks „2” u góry wskazuje, że dany predykat jest dwuargumentowy. Ogólnie, w rachunku predykatów predykatami n-argumentowymi są wyrażenia: „P^n, „R^n”, „S^n”, „$P^n{}_1$”, „$P^n{}_2$”, „$P^n{}_3$”, „$R^n{}_1$”, „$P^n{}_2$”, itd. Indeks „n” u góry wskazuje, że dany predykat jest n-argumentowy. Gdy nie ma wątpliwości co do ilości argumentów danego predykatu, pomija się indeks górny. Piszemy więc „P(a)”, bo widać, że predykat „P” jest tu jednoargumentowy. Podobnie, piszemy „R(a,b)”, bo widać, że predykat „R” jest tu dwuargumentowy. Przyjmuje się, że predykatów każdego rodzaju jest nieskończenie wiele, a pośród nich są również przytaczane wyżej predykaty z języka polskiego.

5. Zdania atomowe a zdania molekularne

Wyrażenie powstałe przez stosowne dołączenie do n-argumentowego predykatu n-tki termów nazywamy **formułą zdaniową atomową**. Formułami zdaniowymi atomowymi języka polskiego są więc takie wyrażenia, jak: „Staś śpi”, „x rozmyśla”, „Michał jest studentem”, „Grześ karci ojca x-a”, „Piotr jest bratem **[49/50]** Pawła”, „Gniezno jest większe od Wrześni”, „z kocha najstarszą siostrę Krysi”, „x leży między Francją a Hiszpanią”, „Poznań leży między stolicą Polski a stolicą Niemiec”, „x oddziela y-a od z-a” itp. Wszystkie one powstają bowiem przez stosowne dołączenie do predykatów odpowiedniej ilości termów. Formuła-mi] zdaniowymi atomowymi rachunku predykatów są takie wyrażenia, jak: „P(a)", „P(b)", „R[f(a)]", „P(x)", „P(a,b)", „P[a,g(y)]", „R(y,b)", „S(y,x)", „S[f(z),g(z)]" itp.

Wyrażenie powstałe przez stosowne dołączenie do n-argumentowego predykatu n-tki terminów jednostkowych nazywa się **zdaniem atomowym**. Zdaniami atomowymi są więc te formuły zdaniowe atomowe, w których nie występują zmienne indywiduowe. Zdaniami atomowymi języka polskiego są takie wyrażenia, jak „Staś śpi", „Michał jest studentem", „Piotr jest bratem Pawła", „Gniezno jest większe od Wrześni", „Poznań leży między stolicą Polski a stolicą Niemiec" itp. Nie są natomiast zdaniami atomowymi wyrażenia „x rozmyśla", „Grześ karci ojca x-a", „z kocha najstarszą siostrę Krysi", „x leży między Francją; a Hiszpanią" czy „x oddziela y-a od z-a", bo występują w nich zmienne indywiduowe. Z tych samych względów są zdaniami atomowymi wyrażenia „P(a)", „P(b)", „R[f(a)]", „P(a,b)", a nie są nimi wyrażenia „P(x)", „P[a,g(y)]", „R(y,b)", „S(y,x)", czy „S[f(z),g(z)]" itp.

Zdanie zbudowane ze zdań atomowych i co najmniej jednego spójnika nazywa się zdaniem molekularnym. Zdaniami molekularnymi języka polskiego są więc takie zdania, jak „Staś nie śpi", „Piotr jest bratem Pawła a Franek jest bratem Marii", „Jeśli Gniezno jest większe od Wrześni, to Września nie jest większa od Gniezna", „Nie jest tak, że (Marcin idzie na wykład lub Jurek idzie na wykład wtedy i tylko wtedy, gdy Marcin studiuje prawo i Jurek studiuje prawo)" itp. Zdaniami molekularnymi są też takie zdania, jak „P(a) $\wedge$ P(b)", „~ P(a,b)", „R(a) $\rightarrow$ P(a)".

Łatwo zauważyć, że każde zdanie atomowe jest zdaniem prostym. Zdania atomowe są bowiem zbudowane wyłącznie z predykatów i terminów jednostkowych, a więc nie zawierają spójników. Dalej okaże się, że niektóre zdania proste nie są jednak zdaniami atomowymi. Łatwo też zauważyć, że każde zdanie molekularne jest zdaniem złożonym. W zdaniu molekularnym występuje bowiem co najmniej jeden spójnik, co właśnie **[50/51]** kwalifikuje takie zdanie jako złożone. Dalej okaże się, że niektóre zdania złożone nie są jednak zdaniami molekularnymi.

6. Kwantyfikatory

Wyrażenie „Piotr jest bratem x-a" nie jest zdaniem, bo nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Daje się ono przekształcić w zdanie na dwa sposoby. Pierwszy polega na wstawieniu za zmienną „x" określonego terminu jednostkowego. Wstawiając za tę zmienną na przykład termin jednostkowy „Paweł", otrzymujemy zdanie „Piotr jest bratem Pawła", które jest prawdziwe albo fałszywe, w zależności od tego, jakie koligacje zachodzą między Piotrem a Pawłem. Oczywiście, tak otrzymane zdanie będzie zdaniem atomowym, o czym mówiliśmy już wyżej.

Drugi sposób przekształcania wyrażenia „Piotr jest bratem x-a" w zdanie polega na poprzedzeniu tego wyrażenia kwantyfikatorem. Wyróżniamy dwa kwantyfikatory, a mianowicie **kwantyfikator duży i kwantyfikator mały**. Duży kwantyfikator, zwany także kwantyfikatorem ogólnym albo generalnym, oznaczamy symbolem „/\". Jego odpowiednikiem w języku polskim są takie wyrażenia, jak „dla każdego", „każdy", a do pewnego stopnia także wyrażenie „wszyscy". Z kolei mały kwantyfikator, zwany również kwantyfikatorem szczególnym albo egzystencjalnym, oznaczamy symbolem „\/". Jego odpowiednikami w języku polskim są takie wyrażenia, jak „dla pewnego", „pewien", „istnieje" bądź „egzystuje". Poprzedzając wyrażenie określonym kwantyfikatorem należy wskazać, do której zmiennej kwantyfikator ten się odnosi, przez podpisanie pod nim owej zmiennej.

Zatem poprzedzając analizowane tu wyrażenie dużym kwantyfikatorem, otrzymujemy zdanie „$\bigwedge_x$ (Piotr jest bratem x-a)".

Oczywiście, zdanie to jest fałszywe, bo przecież Piotr nie jest bratem wszystkich. Poprzedzając natomiast to wyrażenie małym Kwantyfikatorem, otrzymujemy zdanie „$\bigvee_x$ (Piotr jest bratem x-a)". Zdanie to jest prawdziwe, gdy istnieje ktoś, kogo bratem jest Piotr. **[51/52]**

Wyrażenie występujące w nawiasach bezpośrednio po dużym kwantyfikatorze stanowi **zasięg dużego kwantyfikatora**. Na przykład, w zdaniu „$\bigwedge_x$(Piotr jest bratem x-a)" zasięgiem dużego kwantyfikatora jest wyrażenie „Piotr jest bratem x-a". Z kolei w zdaniu „$\bigwedge_x$ (jeżeli x jest studentem, to x ma indeks)" zasięgiem dużego kwantyfikatora jest wyrażenie „jeżeli x jest studentem, to x ma indeks”. Natomiast w wyrażeniu „$\bigwedge_x$ (x jest koszykarzem) lub (x jest siatkarzem)” zasięgiem dużego kwantyfikatora jest tylko wyrażenie „x jest koszykarzem”. Podobnie w zdaniu „$\bigwedge_x$[P(x)]” zasięgiem dużego kwantyfikatora jest wyrażenie „P(x)”. Z kolei w zdaniu „$\bigwedge_x$[R(x) → S(x)]” zasięgiem dużego kwantyfikatora jest wyrażenie „R(x) → S(x)”. Natomiast w wyrażeniu „$\bigwedge_x$[R(x)] → S(x)” zasięgiem dużego kwantyfikatora jest tylko wyrażenie „R(x)”.

Wyrażenie występujące w nawiasach bezpośrednio po małym kwantyfikatorze stanowi **zasięg małego kwantyfikatora**. Na przykład, w zdaniu „$\bigvee_x$(x leży między Francją a Hiszpanią)” zasięgiem małego kwantyfikatora jest wyrażenie „x leży miedzi Francją a Hiszpanią”. Z kolei w zdaniu „$\bigvee_x$(jeżeli x zda egzamin z logiki, to x wyjedzie w góry”) zasięgiem małego kwantyfikatora jest wyrażenie „jeżeli x zda egzamin z logiki, to x wyjedzie w góry.” Natomiast zasięgiem małego kwantyfikatora w wyrażeniu „$\bigvee_x$(x umie jeździć na nartach) i (x umie jeździć na łyżwach) jest tylko wyrażenie „x umie jeździć na nartach”. Podobni w zdaniu „$\bigvee_x$[P(x)]” zasięgiem małego kwantyfikatora jest wyrażenie „P(x)”. Z kolei w zdaniu „$\bigvee_x$[S(x) → R(x)]” zasięgiem małego kwantyfikatora jest wyrażenie „S(x) → R(x)”. Natomiast w wyrażeniu „$\bigvee_x$[S(x)] → R(x)” zasięgiem małego kwantyfikatora jest tylko wyrażenie „S(x)”.

Należy dodać, że w praktyce niekiedy opuszcza się nawiasy wyznaczające zasięg danego kwantyfikatora. Na przykład, w zdaniu „$\bigwedge_x${~[R(x)]}” zasięgiem dużego kwantyfikatora jest wyrażenie **[52/53]** „~[R(x)]”. Jednakże samo to zdanie zapisuje się zazwyczaj następująco „$\bigwedge_x$~[R(x)]”, opuszczając najbardziej zewnętrzne nawiasy wyznaczające zasięg kwantyfikatora. Podobnie w zdaniu „$\bigwedge_x${$\bigvee_y$[P(x,y)]}” zasięgiem dużego kwantyfikatora jest wyrażenie „$\bigvee_y$[P(x,y)]”. Jednakże samo to zdanie zapisuje się zazwyczaj następująco „$\bigwedge_x\bigvee_y$[P(x,y)]”, opuszczając najbardziej zewnętrzne nawiasy Wyznaczające zasięg dużego kwantyfikatora. Z kolei w zdaniu „$\bigvee_x$|~$\bigwedge_y${~[S(x,y)]}|” zasięgiem małego kwantyfikatora jest wyrażenie „~$\bigwedge_x${~[S(x,y)]}” a zasięgiem dużego kwantyfikatora jest wyrażenie „~ [S(x,y)]”. Jednakże samo to zdanie zapisuje się zazwyczaj następująco „$\bigvee_x$~$\bigwedge_y$~[S(x,y)]”, opuszczając zarówno nawiasy wyznaczające zasięg małego kwantyfikatora, jak i nawiasy wyznaczające zasięg dużego kwantyfikatora. Takie opuszczenia nie prowadzą jednak do nieporozumień.

Zmienna występująca w zasięgu odnoszącego się do niej kwantyfikatora występuje w tym zasięgu jako **zmienna związana**. Jeżeli w danym miejscu zmienna znajduje się w zasięgu tylko jednego odnoszącego się do niej kwantyfikatora, to w owym miejscu występuje ona jako związana przez ten kwantyfikator. Na przykład, występując w zasięgu dużego kwantyfikatora w zdaniu „$\bigwedge_x$(Piotr jest bratem x-a)” zmienna „x” jest związana właśnie przez ten duży kwantyfikator. Podobnie występując w zasięgu małego kwantyfikatora w zdaniu „$\bigvee_x$[P(x)]” zmienna „x” jest związana właśnie przez ten mały kwantyfikator. Jeżeli natomiast w danym miejscu zmienna znajduje się w zasięgu kilku odnoszących się do niej kwantyfikatorów, to w owym miejscu Występuje ona jako związana przez ten z nich, którego zasięg jest fragmentem zasięgów pozostałych z tych kwantyfikatorów. Aby to zilustrować rozważmy zdanie „$\bigvee_x${egzaminuje z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa i $\bigvee_x$[jeżeli y zdaje egzamin komisyjny z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa, to $\bigwedge_x$[jeśli x egzaminuje z podstawowych pojęć i metod prawodawstwa to x uczestniczy w egzaminie komisyjnym y-a)]}”. **[53/54]** Zasięgiem kwantyfikatora „$\bigvee_x$ jest tutaj wyrażenie „x egzaminuje je z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa i $\bigvee_x$[jeżeli y zdaje egzamin komisyjny z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa, to $\bigwedge_x$(jeśli x egzaminuje z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa to x uczestniczy w egzaminie komisyjnym y-a)]}”. Natomiast zasięgiem kwantyfikatora „$\bigwedge_x$” jest wyrażenie „jeśli x egzaminuje z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa to x uczestniczy w egzaminie komisyjnym y-a”. W rozważanym tu zdaniu zmienna „x” występuje trzykrotnie. Pierwszy raz występuje ona w wyrażeniu „x egzaminuje z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa”. W tym miejscu zmienna ta znajduje się wyłącznie w zasięgu kwantyfikatora „$\bigvee$” i dlatego jest związana właśnie przez ten kwantyfikator. Drugi i trzeci raz zmienna ta występuje w wyrażeniu „jeśli x egzaminuje z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa to x uczestniczy w egzaminie komisyjnym y-a”. W tych miejscach zmienna „x” znajduje się zarówno w zasięgu kwantyfikatora „$\bigvee_x$” Jak i w zasięgu kwantyfikatora „$\bigwedge$”. Ponieważ jednak zasięg dużego kwantyfikatora stanowi tu fragment zasięgu małego kwantyfikatora, dlatego w obu tych miejscach zmienną „x” wiąże duży kwantyfikator.

Zbadajmy jeszcze wyrażenie „$\bigwedge_x$|P(y) → $\bigvee_x${$\bigvee_y$ [R(x,y)] ≡ S(y,x)}|”. Zmienna „y” występuje zarówno w poprzedniku, jak i w następniku wyrażenia „P(y) → $\bigvee_x${$\bigvee_y$[R(x,y) ≡]S(y,x)}” stanowiącego zasięg kwantyfikatora „$\bigwedge_y$”. W poprzedniku występuje ona jako związana przez ten właśnie kwantyfikator. W następniku zmienna ta występuje tak w lewym, jak i w prawym członie równoważności. W lewym członie występuje jednak w wyrażeniu „R(x,y)” stanowiącym zasięg kwantyfikatora „$\bigvee_y$”. Występuje ona tam jako związana przez ten właśnie kwantyfikator. Natomiast w prawym członie występuje ona jako związana przez kwantyfikator „$\bigwedge_y$” stojący na początku całego, rozważanego wyrażenia.

Zmienna, która występuje w danym miejscu wyrażenia, nie będąc tam zmienną związaną, występuje w owym miejscu jako **[54/55] zmienna wolna**. Na przykład, w wyrażeniu „$\bigvee_y$(y jest bratem x-a)” zmienna „x” występuje jako zmienna wolna. Z kolei w wyrażeniu „ $\bigvee$(y umie grać na instrumentach dętych) → y umie grać na trąbie” zmienna „y” występuje jako związana w poprzedniku a jako wolna w następniku. W wyrażeniu „P(a,x) ∧ $\bigwedge_x$[R(x)]” zmienna „x” występuje jako wolna w pierwszym czynniku, a jako związana w drugim czynniku. Z kolei w wyrażeniu „$\bigwedge_y$[P(y,x)] ∨ $\bigvee_y$[R(x,y)]” zmienna „x” dwukrotnie występuje jako zmienna wolna.

Prześledźmy jeszcze raz przedstawione wyżej określenia na przykładzie wyrażenia „$\bigwedge_x$|$\bigvee_x${P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]} → R(x) ∨ $\bigvee_y$[S(y,z,)]|”

Zasięgiem kwantyfikatora „$\bigwedge_z$” jest w nim wyrażenie „$\bigvee_x${P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]} → R(x) ∨ $\bigvee_y$[S(y,z,)]”. Zasięgiem kwantyfikatora „$\bigvee_x$” jest w nim wyrażenie „P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]”. Zasięgiem kwantyfikatora „$\bigwedge_z$” jest w nim wyrażenie „P(y,z,x)” a zasięgiem kwantyfikatora „$\bigvee_y$” wyrażenie „S(y,z,x)”. Zmienna „x” występuje w badanym wyrażeniu wielokrotnie, ale wszędzie jako zmienna związana. W wyrażeniach „R(x)” oraz „S(y,z,x)” zmienna ta występuje jako związana przez kwantyfikator „$\bigwedge_x$” występujący na początku całego, badanego tu wyrażenia. Natomiast w wyrażeniach „P(x,y)” oraz „P(y,z,x)” występuje ona jako związana przez kwantyfikator „$\bigvee_x$”. Z kolei zmienna „z” występuje raz jako zmienna związana, a raz jako zmienna wolna. W wyrażeniu „P(y,z,x)” występuje ona jako związana przez kwantyfikator „$\bigwedge_z$”. Natomiast w wyrażeniu „S(y,z,x)” występuje ona jako zmienna wolna. Również zmienna „y” występuje w badanym tu wyrażeniu zarówno jako zmienna związana, jak i jako zmienna wolna. W poprzedniku tego wyrażenia występuje ona jako zmienna wolna, zaś w jego następniku jako związana Przez kwantyfikator „$\bigvee_y$”. **[55/56]**

7. Formuły zdaniowe rachunku predykatów

Spróbujmy teraz określić, co stanowi **formułę zdaniową rachunku predykatów**. Otóż: 1) każda formuła zdaniowa atomowa rachunku predykatów jest formułą zdaniową rachunku predykatów, 2) jeżeli wyrażenie postaci A jest formułą zdaniową rachunku predykatów, to jest też formułą zdaniową rachunku predykatów wyrażenie postaci ~A, 3) jeżeli wyrażenia postaci A i B są formułami zdaniowymi rachunku predykatów, to są też formułami zdaniowymi rachunku predykatów wyrażenia postaci A ∧ B, A ∨ B, A → B oraz A ≡ B, 4) jeżeli wyrażenie postaci A jest formułą zdaniową rachunku predykatów, to formułami zdaniowymi rachunku predykatów są też wyrażenia postaci $\bigwedge_{xi}$ (A) oraz $\bigvee_{xi}$(A) (dla dowolnego i). Określenie to wyznacza zbiór wszystkich formuł zdaniowych rachunku predykatów. Innymi słowy, określenie to wskazuje, jak należy budować wyrażenie, aby było ono formułą zdaniową rachunku predykatów.

Jak widać, powyższe określenie bazuje na podanym wcześniej określeniu formuły zdaniowej atomowej. Wszystkie formuły zdaniowe atomowe są bowiem - na podstawie punktu 1 - formułami zdaniowymi rachunku predykatów. Formułami zdaniowymi są więc wyrażenia: „P(x)”, „P(a)” „„R[f(y)]”, „R(a,y)”, „S[g(x),y]”, „P[f(b),x,y]” itp. Na podstawie punktu 2 formułami zdaniowymi są też negacje wszystkich powyższych formuł, a więc wyrażenia: „~ P(x)”, „~ P(a)”, „~ R[f(y)]”, „~ R(a,y)”, „~ S[g(x),y]”, „~ P[f(b),x,y]” itd. Na podstawie punktu 2 formułami zdaniowymi są też wyrażenia: „~ ~ P(x)”, „~ ~ R(a,y)”, „~ ~ S[g(x),y]” itd. Ponieważ formułami zdaniowymi są wyrażenia: „P(x)” i „R[f(y)]”, to - na podstawie punktu 3 - są nimi też wyrażenia: „P(x) ∧ R[f(y)]”, „P(x) ∨ R[f(y)]”, „P(x) → R[f(y)]” oraz „P(x) ≡ R[f(y)]”. Ponieważ formułami zdaniowymi są również wyrażenia „~ [R(a,y)]”, „S[g(x),y]”, to - na podstawie punktu 3

- formułami zdaniowymi są też wyrażenia: „~ [R(a,y)] ∧ S[g(x),y]”, „~ [R(a,y)] ∨ S[g(x),y]”, „~ [R(a,y)] → S[g(x),y]” oraz „~ [R(a,y)] ≡ S[g(x),y]”.

Punkt 4 podanego wyżej określenia pozwala poprzedzić dowolną formułę zdaniową dużym albo małym kwantyfikatorem odnoszącym się do jakiejkolwiek zmiennej indywiduowej, co **[56/57]** w efekcie daje nową formułę zdaniową. Ponieważ formułami zdaniowymi są wyrażenia: „P(x)”, „R[f(y)]”, „R(a,y)”, „S[g(x),y]”, „P[f(b),x,y]”, to - na podstawie punktu 4 – są nimi też wyrażenia „$\bigwedge_x$[P(x)]”, „$\bigwedge_y${R[f(y)]}”, „$\bigwedge_y$[R(a,y)]”, „$\bigwedge_x${S[g(x),y]}”, „$\bigwedge_y${P[f(b),x,y]}”. Trzeba zauważyć, że nie stawia się tu wymogu, aby dodany na początku wyrażenia kwantyfikator odnosił się do zmiennej występującej już w samym tym wyrażeniu. Ponieważ formułami zdaniowymi są wyrażenia: „P(a)”, „R[f(y)]” oraz „S[g(x),y]”, to - na podstawie punktu 4 - są nimi też wyrażenia: „$\bigwedge_x$[P(a)]”, „$\bigwedge_x$[R[f(y)]”, „$\bigwedge_z${S[g(x),y]}”.Oczywiście, można powiedzieć, że w wyrażeniach tych kwantyfikatory są poniekąd zbędne, gdyż odnoszą się do zmiennych nie występujących w ich zasięgach. Tym niemniej, wyrażenia te są poprawnie zbudowanymi formułami zdaniowymi. Odpowiednikiem pierwszej z nich byłoby na przykład następujące wyrażenie języka polskiego „dla każdego x (Tomek jest studentem)”. Wyrażenie to, choć dziwaczne, jest jednak poprawną formułą zdaniową. Zgodnie z punktem 4 formułę zdaniową wolno poprzedzać także małym kwantyfikatorem. Skoro więc formułami zdaniowymi są wyrażenia: „P(x)”, „R[f(y)]”, „R(a,y)” i „S[g(x),y]”, to - na podstawie punktu 4 - są nimi również wyrażenia: „$\bigvee_x$[P(x)]”, „$\bigvee_y${R[f(y)]}”, „$\bigvee_y${R(a,y)}”, „$\bigvee_x${S[g(x),y]}” a także „$\bigvee_y$[P(x)]”, „$\bigvee_z$[P(x)]” oraz „$\bigvee_x${R[f(y)]}”.

Punkt 4 pozwala również poprzedzać kwantyfikatorami wyrażenia zawierające już kwantyfikatory. Ponieważ formułami zdaniowymi są wyrażenia: „$\bigwedge_x${S[g(x),y]}” i „$\bigvee_x${S[g(x),y]}”, dlatego - na podstawie punktu 4 - są nimi również wyrażenia: „$\bigwedge_y\bigwedge_x${S[g(x),y]}”, „$\bigwedge_y\bigvee_x${S[g(x),y]}”, „$\bigvee_y\bigwedge_x${S[g(x),y]}”oraz „$\bigvee_y\bigvee_x${S[g(x),y]}”. Skoro zaś formułą zdaniową jest wyrażenie „$\bigwedge_y\bigwedge_x${S[g(x),y]}” to są nimi również wyrażenia „$\bigwedge_z\bigwedge_y\bigwedge_x${S[g(x),y]}” oraz „$\bigvee_z\bigwedge_y\bigwedge_x${S[g(x),y]}”. Łatwo zauważyć, że w ostatnich dwóch formułach zdaniowych kwantyfikatory **[57/58]** odnoszące się do zmiennej „z” są właściwie zbędne, gdyż zmienna ta nie występuje w ich zasięgach.

Przechodząc do nieco bardziej skomplikowanych sekwencji,! wykażemy, że wyrażenie „$\bigwedge_x$[P(x) ∧ R(x)] → $\bigwedge_x$[P(x) ∧ $\bigwedge_x$[R(x)]” jest formułą zdaniową rachunku predykatów. Wyrażenia „P(x)” i „R(x)” są formułami zdaniowymi atomowymi, a więc - na podstawie punktu 1 - są formułami zdaniowymi. Skoro zaś są one formułami zdaniowymi, to - na podstawie punktu 3 - formułą zdaniową jest wyrażenie „P(x) ∧ R(x)”. Zatem - na podstawie punktu 4 - formułą zdaniową jest też wyrażenie „$\bigwedge_x$[P(x) ∧ R(x)]”. Ponieważ formułami zdaniowymi są wyrażenia „P(x)” i „R(x)”, to - na podstawie punktu 4 - są nimi także wyrażenia: „$\bigwedge_x$[P(x)]” i „$\bigwedge_x$[R(x)]”. Skoro zaś te wyrażenia są formułami zdaniowymi, to - na podstawie punktu 3 - jest nią wyrażenie „$\bigwedge_x$[P(x)] ∧ $\bigwedge_x$[R(x)]”. Jeśli zaś formułami zdaniowymi są wyrażenia „$\bigwedge_x$[P(x) ∧ R(x)]” i „$\bigwedge_x$[P(x)] ∧ $\bigwedge_x$[R(x)]”, to - na podstawie punktu 3 - jest nią również badane wyrażenie „$\bigwedge_x$[P(x) ∧ R(x)] → $\bigwedge_x$[P(x)] ∧ $\bigwedge_x$[R(x)]”. Warto dodać, że odpowiednikiem tej formuły zdaniowej jest w języku polskim na przykład zdanie „Jeżeli każdy x jest sportowcem i studentem, to każdy x jest sportowcem i każdy x jest studentem”.

Wykażemy teraz, że formułą zdaniową jest również wyrażenie „$\bigwedge_y${P[f(a),y] ≡ R[f(a),y]} → |$\bigvee_y${P[f(a),y]} ≡ $\bigvee_y${P[f(a),y]}|”. Wyrażenia „P[f(a),y]” i „R[f(a),y]” są formułami zdaniowymi atomowymi, a więc - na podstawie punktu 1 – są one formułami zdaniowymi. Skoro zaś są one formułami zdaniowymi, to - na podstawie punktu 3 - formułą zdaniową jest też wyrażenie „P[f(a),y] ≡ R[f(a),y]”. Zatem - na podstawie punktu 4 - formułą zdaniową jest również wyrażenie „$\bigwedge_y${P[f(a),y] ≡ R[f(a),y]}”. Skoro formułami zdaniowymi są wyrażenia „P[f(a),y]” i „R[f(a),y]”, to - na podstawie punktu 4 - są nimi też wyrażenia „$\bigvee_y$(P[f(a),y]}” i „$\bigvee_y${R[f(a)y]}”. Gdy te wyrażenia są formułami zdaniowymi, to - na podstawie punktu 3 - jest nią również wyrażenie **[58/59]** „$\bigvee_y${P[f(a),y]} ≡ $\bigvee_y${P[f(a),y]}”. Jeśli zaś formułami zdaniowymi są wyrażenia „$\bigwedge_y${P[f(a),y] ≡ R[f(a),y]}” oraz „$\bigvee_y${P[f(a),y]{ ≡ $\bigvee_y$}P[f(a),y]}”, to - na podstawie punktu 3 – formułą zdaniową jest też wyrażenie „$\bigwedge_y${P[f(a),y] ≡ R[f(a),y]} → |$\bigvee_y${P[f(a),y]} ≡ $\bigvee_y${P[f(a),y]}|”. Warto dodać, że odpowiednikiem powyższej formuły zdaniowej jest w języku polskim na przykład zdanie „Jeżeli dla każdego y (ojciec Marcina jest wierzycielem y-a wtedy i tylko wtedy, gdy ojciec Marcina pożyczył pieniądze y-owi), to (istnieje taki y, że ojciec Marcina jest jego wierzycielem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki y, że ojciec Marcina pożyczył mu pieniądze)".)

Wykażemy jeszcze, że wyrażenie, którym posłużyliśmy się, ilustrując rozważania o kwantyfikatorach, też jest formułą zdaniową rachunku predykatów. Zauważmy więc, że wyrażenia: „P(x,y)", „P(y,z,x)", „R(x)" i „S(y,z,x)" są formułami zdaniowymi atomowymi. Przeto - na podstawie punktu 1 - są one formułami zdaniowymi. Skoro zaś formułą zdaniową jest wyrażenie „P(y,z,x)", to - na podstawie punktu 4 - jest nią także wyrażenie „$\bigwedge_x$[P(y,z,x)]". Ponieważ to wyrażenie jest formułą zdaniową i wyrażenie „P(x,y)" jest formułą zdaniową, to - na podstawie punktu 3 - formułą zdaniową jest także wyrażenie „P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]". Jeśli zaś ono jest formułą zdaniową, to - na podstawie punktu 4 - jest nią też wyrażenie „$\bigvee_x${P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]}". Skoro zaś „S(y,z,x)" jest formułą zdaniową, to - na podstawie punktu 4 - jest nią też wyrażenie „$\bigvee_y$[S(y,z,x)]". Gdy to wyrażenie jest formułą zdaniową i formułą zdaniową jest wyrażenie „R(x)", to - na podstawie punktu 3 - jest nią też wyrażenie „R(x) ∨ $\bigvee_y$[S(y,z,x)]". Jeśli formułami zdaniowymi są wyrażenia „$\bigvee_x${P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]}" i „R(x) ∨ $\bigvee_y$[S(y,z,x)]", to - na podstawie punktu 3 - jest nią też wyrażenie „$\bigvee_x${P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]} → R(x) ∨ $\bigvee_y$[S(y,z,x)]". Zatem - na podstawie punktu 4 - jest nią wyrażenie „$\bigwedge_x$|$\bigvee_x${P(x,y) ≡ $\bigwedge_z$[P(y,z,x)]} → R(x) ∨ $\bigvee_y$[S(y,z,x)]|". **[59/60]**

Łatwo zauważyć, że formuł zdaniowych jest nieskończenie wiele. Już bowiem formuł zdaniowych atomowych jest nieskończenie wiele, gdyż są nimi wszystkie takie wyrażenia, jak „P(a)", „P(b)", „P(c)" itd. W dodatku, formułami zdaniowymi są też j wyrażenia „~[P(a)]", „~ ~[P(a)]", „~ ~ ~[P(a)]", których jest nieskończenie wiele. Zauważmy też, że nie ma też jakiejś granicznej długości, czy stopnia komplikacji formuł zdaniowych. Niemniej jednak każda, nawet najbardziej skomplikowana, formuła zdaniowa ma skończoną długość. Nie ma tedy formuł zdaniowych o nieskończonej długości.

Należy dodać, że nie każda sekwencja zmiennych indywiduowych i imion własnych oraz funktorów, predykatów i kwantyfikatorów stanowi formułę zdaniową rachunku predykatów. Nie jest na przykład formułą zdaniową sekwencja „P^2(x)". Skoro bowiem predykat „P" jest dwuargumentowy, to nie tworzy on formuły zdaniowej z jedną tylko zmienną indywiduową. Nie jest też formułą zdaniową sekwencja „PR(x)". Chociaż bowiem jest formułą zdaniową sekwencja „R(x)", gdyż jest ona formułą zdaniową atomową, to żaden z punktów określenia formuły zdaniowej nie pozwala rozwinąć jej w wyrażenie „PR(x)". Nie jest również formułą zdaniową sekwencja „$\bigwedge_x$[f(x)]". Wyrażenie „f(x)" jest bowiem termem, nie zaś formułą zdaniową, a kwantyfikatorem wolno poprzedzać tylko wyrażenia będące formułami zdaniowymi.

Formuły zdaniowe nie zawierające zmiennych wolnych są **zdaniami rachunku predykatów**. Zdaniami są więc formuły zdaniowe: „P(a)", „$\bigwedge_x$[P(x)]", „$\bigvee_y$[R(a,y)]", „$\bigwedge_x\bigvee_y${R[f(x),y]}", gdyż nie zawierają zmiennych wolnych. Nie są natomiast zdaniami formuły zdaniowe: „P(x)", „$\bigwedge_x$[P(x,y)]" czy „R(a,y)", bo zawierają one zmienne wolne. Łatwo zauważyć, że każda formuła zdaniowa, która nie jest zdaniem, daje się przekształcić w zdanie. Wystarczy tylko poprzedzić ją kwantyfikatorami odnoszącymi się do występujących w niej zmiennych. Na przykład formuła zdaniowa „P(x)" daje się przekształcić w zdanie „$\bigwedge_x$[P(x)]" albo też w zdanie „$\bigvee_x$[P(x)]". Podobnie formuła zdaniowa „$\bigwedge_x$[P(x,y)]" daje się przekształcić w zdanie „$\bigwedge_y\bigwedge_x$[P(x,y)]" albo też w zdanie „$\bigvee_y\bigwedge_x$[P(x,y)]". **[60/61]**

Już wcześniej zauważyliśmy, że wprawdzie każde zdanie atomowe jest zdaniem prostym, ale nie każde zdanie proste jest zdaniem atomowym. Wyrażenie „P(a)" jest zdaniem prostym i zdaniem atomowym. Natomiast wyrażenie „$\bigvee_x$[P(x)]" jest wprawdzie zdaniem prostym, ale nie jest zdaniem atomowym. Przypomnijmy, że jest ono zdaniem prostym, bo nie występuje w nim żaden spójnik. Jednakże nie jest zdaniem atomowym, bo występuje w nim kwantyfikator. Zauważyliśmy też, że wprawdzie każde zdanie molekularne jest zdaniem złożonym, ale nie każde zdanie złożone jest zdaniem molekularnym. Wyrażenie „P(a) ∧ R(a)" jest zdaniem złożonym i zdaniem molekularnym. Natomiast wyrażenie „$\bigwedge_x$[P(x) → R(x)]" jest wprawdzie zdaniem złożonym, ale nie jest zdaniem molekularnym. Przypomnijmy, że jest ono zdaniem złożonym, bo występuje w nim spójnik. Jednakże nie jest zdaniem molekularnym, bo nie jest wyłącznie kombinacją spójników i zdań atomowych.

8. Wybrane tezy rachunku predykatów

Przypomnijmy sobie, że po wyznaczeniu formuł rachunku zdań skonstatowaliśmy, iż pewne z nich są tezami rachunku zdań. Następnie poznaliśmy metodę zero-jedynkową pozwalającą w skończonej ilości operacji ustalić, czy dana formuła jest tezą rachunku zdań. Z kolei dokonaliśmy formalizacji rachunku zdań, wybierając pewne jego tezy jako aksjomaty i precyzując reguły otrzymywania z jednych tez innych tez. Wreszcie, omówiliśmy wybrane tezy rachunku zdań.

Powyżej wyznaczyliśmy formuły zdaniowe rachunku predykatów. Pewne z nich okazują się być tezami rachunku predykatów. Nie ma jednak, analogicznej do zero-jedynkowej, metody ustalania w skończonej ilości operacji czy dana formuła zdaniowa jest tezą rachunku predykatów. Z kolei formalizacja rachunku predykatów jest przedsięwzięciem wielce skomplikowanym, przekraczającym to, co z logiki może być przydatne przyszłym prawnikom. Ograniczymy się tu więc do omówienia wybranych tez rachunku predykatów. Zaznaczmy, że w przykładach będziemy **[61/62]** zawsze odnosić te tezy do zbioru studentów pierwszego roku prawa. Jeśli więc mowa będzie o każdym x, to w przykładzie będziemy mieli na myśli każdego studenta pierwszego roku i prawa. Jeśli zaś mowa będzie o pewnym x, to w przykładzie będziemy mieli na myśli to, że istnieje ktoś taki pośród studentów pierwszego roku prawa.

Zauważmy, że tezą rachunku predykatów jest formuła zdaniowa „$\bigwedge_x[P(x)] \rightarrow \bigvee_x[P(x)]$” głosząca, że jeśli każdy x jest P(x), to i jakiś x jest P(x). Przy założeniu, że predykat „P” znaczy tyle, co „zdał maturę”, teza ta głosi, że jeśli każdy x (w domyśle; każdy student pierwszego roku prawa) zdał maturę, to istnieje taki x (w domyśle; istnieje taki student pierwszego roku prawa), który zdał J maturę. Tezą rachunku predykatów jest też formuła zdaniowa „$\bigwedge_x[R(x)] \rightarrow \bigvee_x[R(x)]$” głosząca, że jeśli dla każdego x jest R(x), to i dla pewnego x jest R(x). Przy założeniu, że predykat „R” znaczy tyle, co „potrafi jeździć na rowerze”, teza ta głosi, iż jeśli każdy x (w domyśle; każdy student pierwszego roku prawa) umie jeździć na rowerze, to istnieje taki x (w domyśle; istnieje taki student pierwszego roku prawa), który umie jeździć na rowerze. Tezą rachunku predykatów jest również formuła zdaniowa „$\bigwedge_x[S(a,x)] \rightarrow \bigvee_x[S(a,x)]$” głosząca, że jeśli dla pewnego wybranego obiektu a oraz dla każdego x jest S(a,x), to dla owego obiektu a oraz dla pewnego x jest S(a,x). Przy założeniu, że „a” oznacza Warszawę, zaś predykat „S” znaczy tyle, co „był w”, teza ta głosi, że jeśli każdy x był w Warszawie, to istnieje taki x, który był w Warszawie. Zauważmy, że wszystkie te tezy podpadają pod następujący schemat

(1) $\bigwedge_x(A) \rightarrow \bigvee_x(A)$

Pod schemat ten podpada jeszcze wiele innych tez rachunku predykatów, na przykład teza „$\bigwedge_x[P(x,y)] \rightarrow \bigvee_x[P(x,y)]$”. Zamiast więc konkretnych tez lepiej jest podawać ich schematy, co też czynić będziemy dalej. Wracając do powyższego schematu dodajmy, że nazywa się on **prawem zastępowania dużego kwantyfikatora przez mały kwantyfikator.** Swobodnie mówiąc, prawo to głosi, że jeśli dla każdego x jest A, to dla pewnego x jest A. Zauważmy, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę. Mały kwantyfikator nie daje się zastąpić dużym kwantyfikatorem. Jeśli bowiem **[62/63]** istnieje taki x, który ma ponad 190 cm wzrostu, to nie znaczy to, że każdy x ma ponad 190 cm wzrostu.

(2) $\bigwedge_x\bigwedge_y(A) \rightarrow \bigwedge_y\bigwedge_x(A)$

Schemat ten nazywa się **prawem przestawiania dużych kwantyfikatorów**. Głosi ono, że dla każdego x każdy y jest taki, że A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego y każdy x jest taki, że A. Kolejność dużych kwantyfikatorów poprzedzających formułę zdaniową okazuje się więc nieistotna. Przykład: dla każdego x-a każdy y jest taki, że x widział y-a na wykładach wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego y-a każdy x jest taki, że x widział y-a na wykładach.

(3) $\bigvee_x\bigvee_y(A) \rightarrow \bigvee_y\bigvee_x(A)$

Schemat ten nazywa się **prawem przestawiania małych kwantyfikatorów**. Głosi ono, że dla pewnego x istnieje taki y, że A wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego y istnieje taki x, że A. Kolejność małych kwantyfikatorów poprzedzających formułę zdaniową okazuje się więc nieistotna. Przykład: dla pewnego x-a istnieje taki y, że x odpisywał od y-a na sprawdzianie z logiki wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego y-a istnieje taki x, że x odpisywał od y-a na sprawdzianie z logiki.

(4) $\bigvee_x\bigwedge_y(A) \rightarrow \bigwedge_y\bigvee_x(A)$

Schemat ten nazywa się **prawem przestawiania małego kwantyfikatora z dużym**. Głosi ono, że jeśli istnieje taki x, iż dla każdego y jest A, to dla każdego y istnieje taki x, że jest A. Przykład: jeśli istnieje taki x, że dla każdego y-a x zna y-a, to dla każdego y-a istnieje taki x, że x zna y-a. Innymi słowy, jeśli ktoś zna wszystkich, to dla każdego istnieje ktoś, kto go zna (tym kimś jest właśnie ten, kto zna wszystkich). Zauważmy, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę. Nie jest dopuszczalne przestawianie dużego kwantyfikatora z małym. Jeśli bowiem dla każdego x-a istnieje taki y, że x kocha y-a, to nie znaczy to, że istnieje taki y, iż dla każdego x-a, x kocha y-a. Innymi słowy, jeśli każdy kogoś kocha, to nie znaczy to, że istnieje ktoś kochany przez wszystkich.

(5) $\sim\bigwedge_x(A) \equiv \bigvee_x \sim(A)$

Schemat ten nazywa się **prawem negowania dużego kwantyfikatora**. Głosi ono, że nie jest tak, iż dla każdego x jest A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki x, dla którego nie jest A. Przykład: nie jest tak, że każdy x zda egzamin z prawa rzymskiego wtedy **[63/64]** i tylko wtedy, gdy istnieje taki x, który nie zda egzaminu z prawa rzymskiego.

(6) $\sim\bigvee_x(A) \equiv \bigwedge_x \sim(A)$

Schemat ten nazywa się **prawem negowania małego kwantyfikatora**. Głosi ono, że nie istnieje taki x, dla którego jest A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x nie jest A. Przykład: nie istnieje taki x, który umie fruwać wtedy i tylko wtedy, gdy każdy x nie umie fruwać.

(7) $\bigwedge_x(A) \equiv \sim\bigvee_x \sim(A)$

Schemat ten nazywa się **prawem zastępowania dużego kwantyfikatora**. Głosi ono, że dla każdego x jest A wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki x, dla którego nie jest A. Zatem w każdymi wyrażeniu duży kwantyfikator można zastąpić odpowiednią kombinacją negacji z małym kwantyfikatorem. Przykład: każdy x umie pisać wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki x, który nie umie pisać. Gdziekolwiek więc stwierdza się, że każdy x umie pisać, to można to zastąpić stwierdzeniem, że nie istnieje taki x, który nie umie pisać.

(8) $\bigvee_x(A) \equiv \sim\bigwedge_x \sim(A)$

Schemat ten nazywa się **prawem zastępowania małego kwantyfikatora**. Głosi ono, że istnieje taki x, dla którego jest A wtedy i i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że dla każdego x nie jest A. Przeto w każdym wyrażeniu mały kwantyfikator można zastąpić odpowiednią kombinacją negacji z dużym kwantyfikatorem. Przykład: istnieje taki x, który był w Paryżu wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że każdy x nie był w Paryżu. Gdziekolwiek więc i stwierdza się, że pewien x był w Paryżu, to można to zastąpić stwierdzeniem, iż nie jest tak, że każdy x nie był w Paryżu.

(9) $\bigwedge_x(A \to B) \to [\bigwedge_x(A) \to \bigwedge_x(B)]$

Schemat ten nazywa się **prawem rozkładania dużego kwantyfikatora względem implikacji**. Głosi ono, że jeśli dla każdego x jest tak, iż jeżeli A to B, to jeżeli dla każdego x jest A, to dla każdego x jest B. Przykład: jeśli dla każdego x jest tak, że jeśli x uczy się pilnie, to x zda egzamin z logiki), to jeżeli każdy x uczy się pilnie, to każdy x zda egzamin z logiki.

(10) $\bigwedge_x(A \to B) \to [\bigvee_x(A) \to \bigvee_x(B)]$ **[64/65]**

Schemat ten nazywa się **prawem rozkładania małego kwantyfikatora względem implikacji**. Głosi ono, że jeśli dla każdego x jest tak, że jeżeli A, to B, to jeżeli istnieje taki x, dla którego jest A, to istnieje taki x, dla którego jest B. Przykład: jeśli dla każdego x jest tak, że (jeżeli x wagaruje przez cały semestr, to x przepadnie na egzaminie z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa), to jeżeli istnieje taki x, który wagaruje przez cały semestr, to istnieje taki x, który przepadnie na egzaminie z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa.

(11) $\bigwedge_x(A \wedge B) \equiv [\bigwedge_x(A) \wedge \bigwedge_x(B)]$

Schemat ten nazywa się **prawem rozkładania dużego kwantyfikatora względem koniunkcji**. Głosi ono, że dla każdego x jest A i B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x jest A i dla każdego x jest B. Przykład: każdy x umie chodzić i umie mówić wtedy i tylko wtedy, gdy każdy x umie chodzić i każdy x umie mówić.

(12) $\bigvee_x(A \vee B) \equiv [\bigvee_x(A) \vee \bigvee_x(B)]$

Schemat ten nazywa się **prawem rozkładania małego kwantyfikatora względem alternatywy**. Głosi ono, że istnieje taki x, dla którego jest A lub B wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki x, dla którego jest A lub istnieje taki x, dla którego jest B. Przykład: istnieje taki x, który był w Rzymie lub był w Londynie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki x, który był w Rzymie lub istnieje taki x, który był w Londynie.

(13) $\bigwedge_x(A) \vee \bigwedge_x(B) \rightarrow \bigwedge_x(A \vee B)$

Schemat ten nazywa się **prawem składania dużego kwantyfikatora względem alternatywy**. Głosi ono, że jeśli dla każdego x jest A lub dla każdego x jest B, to dla każdego x jest A lub B. Przykład: jeśli każdy x zda egzamin z logiki lub każdy x zda egzamin z prawa rzymskiego, to każdy x zda egzamin z logiki lub zda egzamin z prawa rzymskiego. Zauważmy, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę. Jeśli bowiem każdy x jest kobietą lub jest mężczyzną, to nie znaczy to, że każdy x jest kobietą lub każdy x jest mężczyzną.

(14) $\bigvee_x(A \wedge B) \rightarrow \bigvee_x(A) \wedge \bigvee_x(B)$

Schemat ten nazywa się **prawem rozkładania małego kwantyfikatora względem koniunkcji**. Głosi ono, że jeśli istnieje taki x, dla którego jest A i B, to istnieje taki x, dla którego jest A i istnieje taki x, dla którego jest B. Przykład: jeśli istnieje taki x, który zda **[65/66]** egzamin poprawkowy z prawa rzymskiego i zda egzamin poprawkowy z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa, to istnieje taki x, który zda egzamin poprawkowy z prawa rzymskiego i istnieje taki x, który zda egzamin poprawkowy z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa. Zauważmy, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi. Jeśli bowiem istnieje taki x, który ze egzamin komisyjny z logiki i istnieje taki x, który zda egzamin komisyjny z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa, to nie znaczy to jeszcze, że istnieje taki x, który zda zarówno egzamin komisyjny z logiki, jak i egzamin komisyjny z podstawowych pojęć i metod prawoznawstwa.

(15) $\bigwedge_x(A \equiv B) \rightarrow \bigwedge_x(A) \equiv \bigwedge_x(B)$

Schemat ten nazywa się **prawem ekstensjonalności dla dużego kwantyfikatora**. Głosi ono, że jeśli dla każdego x jest tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy B, to dla każdego x jest A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x jest B. Przykład: jeśli każdy x zdążył na wykład wtedy i tylko wtedy, gdy wstał wcześnie rano to każdy x zdążył na wykład wtedy i tylko wtedy, gdy każdy x wstał wcześnie rano.

(15) $\bigwedge_x(A \equiv B) \rightarrow \bigvee_x(A) \equiv \bigvee_x(B)$

Schemat ten nazywa się **prawem ekstensjonalności dla małego kwantyfikatora**. Głosi ono, że jeśli dla każdego x jest tak, że A wtedy i tylko wtedy, gdy B, to istnieje taki x, dla którego jest A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki x, dla którego jest B. Przykład: jeśli każdy x ma katar wtedy i tylko wtedy, gdy chodzi z gołą głową, to istnieje taki x, który ma katar wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki x, który chodzi z gołą głową.

ZADANIA

1. Wymień wszystkie terminy jednostkowe występujące w poniższych zdaniach. Oddziel imiona własne od deskrypcji:

a) Ojciec Władysława Mickiewicza był najwybitniejszym polskim poetą romantycznym,
b) Zwłoki Bolesława Chrobrego spoczywają w Katedrze Poznańskiej,
c) Główny budowniczy Kanału Sueskiego wiedział, że 2 + 3 = 5,
d) Irek słyszał jak jego matka chrzestna mówiła, że Rysiek studiuje wydziale prawa Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, **[66/67]**
e) Najwybitniejszy logik starożytności nauczał w najbardziej demokratycznym mieście Grecji,
f) Ta, która urodziła tę, która urodziła tę, która urodziła tę, która urodziła tego, który jako pierwszy człowiek stanął na Księżycu nie znała tego, który był ojcem tego, który był ojcem tego, który był ojcem tego, który odkrył Amerykę.

2. Wymień wszystkie funktory występujące w poniższych zdaniach. Podaj argumenty każdego z tych funktorów.

a) Mąż Krystyny jest wiceprezesem do spraw handlu najprężniejszej spółdzielni w Wielkopolsce,
b) $4 + (37) = 4^3 / 8 - \log_{10} 1000$,
c) Cena najdroższego biletu na premierowe przedstawienie „Halki” w Operze Poznańskiej była równa ćwierci ceny wywoławczej jedynego egzemplarza pierwszego numeru „Głosu Wielkopolskiego” na aukcji zorganizowanej po raz drugi przez Michała,

d) Siła grawitacji między Słońcem a Ziemią jest wprost proporcjonalna do sumy masy Słońca i masy Ziemi, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między Słońcem a Ziemią,
e) Ten, który zabił tego, który zdradził tego, który zniszczył tego, który odkrył największy sekret mafii naraził się temu, który skłócił Billa z Jimem,
f) Różnica między wysokością nad poziomem morza stolicy Francji a wysokością nad poziomem morza stolicy Włoch jest mniejsza niż różnica między wysokością nad poziomem morza szczytu najwyższej góry Chin a wysokością nad poziomem morza ujścia najdłuższej rzeki Afryki.

3. Oddziel te przypadki, w których poprawnie wstawiono terminy jednostkowe za zmienne indywiduowe, od tych przypadków, w których tę operację wykonano niepoprawnie:
a) Jeżeli x jest wyższy od y, zaś y jest równy z, to x nie jest niższy od z; Jeżeli Robert jest wyższy od Piotra, zaś Piotr jest równy Ani, to Robert nie jest niższy od Ani,
b) Suma x oraz y jest równa z wtedy i tylko wtedy, gdy różnica między z oraz x równa się y;
Suma 3 oraz 3 jest równa 7 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica między 7 oraz 3 równa się 3;
c) W indeksie y jest x ocen niedostatecznych, zaś według karty egzaminacyjnej y ma z ocen niedostatecznych;
W indeksie Janka jest 5 ocen niedostatecznych, zaś według karty egzaminacyjnej Janek ma 6 ocen niedostatecznych,
d) x, oświadczył x_2, że x_3 leży nad x_4;
Burek oświadczył Poznaniowi, że 9 leży nad Giewontem,
e) x = y wtedy i tylko wtedy, gdy y = x;
5 = 8 wtedy i tylko wtedy, gdy 5 = 8,
f) x_1 jest starszy od y_1 i x_1 jest większy od x_2 i x_1 jest piękniejszy od y_2 i y_1 jest mniejszy od y_2 i y_1 jest mniejszy od x_2 i y_1 jest bogatszy od y_2 i x_2 jest czystszy od y_2; **[67/68]**
Poznań jest starszy od Krakowa i Poznań jest większy od Krakowa i Poznań jest piękniejszy od Wałbrzycha i Kraków jest mniejszy od Krakowa i Kraków jest bogatszy od Wałbrzycha i Kraków jest czystszy od Wałbrzycha,

4. Wymień wszystkie predykaty występujące w poniższych zdaniach. Podaj argumenty każdego z tych predykatów:
a) Staś śpi,
b) Basia spaceruje a Mirek rozmawia z Elą, zaś Bartek, godzi Michała z Pawłem,
c) $\bigwedge_{x1}\bigwedge_{x2}\bigwedge_{z}$($x_1$ zapłacił x_2 za y kwotę z)],
d) Newton potwierdził teorię heliocentryczną, a Darwin zanegował pogląd o niezmienności gatunków,
e) Nie jest tak, że Kasia nie lubi Włodka i nie jest tak, że Jola nie siedzi między Zosią a Witkiem,
f) Minister Spraw Zagranicznych Rzeczpospolitej Polskiej starannie przeanalizował wszystkie możliwe warianty reakcji Litwy na porozumienie Polski z Białorusią o wspieranie zabiegów Ukrainy o przyjęcie Łotwy do Unii Europejskiej.

5. Wskaż, które z następujących zdań są a) zdaniami atomowymi, b) zdaniami; prostymi, lecz nie atomowymi, c) zdaniami molekularnymi, d) zdaniami złożonymi, lecz nie molekularnymi:
a) $\bigvee_{x}$(x zna język hiszpański),
b) Pikuś warknął na Reksa,
c) Wykładowca dyktuje, a studenci piszą,
d) Największy stan Stanów Zjednoczonych Ameryki jest większy od największego kraju Republiki Federalnej Niemiec,
e) Janka nie lubi czereśni, zaś Kazia nie lubi wiśni,
f) $\bigwedge_{x}$ (jeżeli x zdawał egzamin maturalny z historii, to x nie zdawał egzaminu maturalnego z biologii).

6. Określ zasięgi poszczególnych kwantyfikatorów w następujących wyrażeniach:

a) Dla każdego x, [jeżeli x skończył studia prawnicze, to istnieje taki y, że (x pisał pracę magisterską pod kierunkiem y-a)],
b) $\bigvee_z\{P(x,z) \equiv \bigwedge_y[R(y,z)]\}$,
c) $\bigwedge_x\bigwedge_z\{\bigvee_y[R(x,y,z] \wedge \bigwedge_x[S(x,y,z)]\} \rightarrow \sim\bigwedge_z\bigvee_x\{[P(z,x) \vee \bigwedge_y[P(z,y)]\}$,
d) $\bigwedge_y\{R(x,z) \rightarrow \bigvee_z[R(x,z)]\}$,
e) Jeżeli każdy student prawa złamie jedną gałąź drzewa genealogicznego, to drzewo genealogiczne obumrze,
f) $\bigvee_x|S(x) \equiv \sim \bigvee_y\{P(x,y) \equiv \bigvee_z[R(x,y,z)]\}|$.

7. Wskaż w których miejscach poniższych wyrażeń poszczególne zmienne występują jako zmienne wolne, a w których jako zmienne związane (przez które kwantyfikatory); **[68/69]**
a) $\bigwedge_x\{[P(x,y)] \rightarrow \bigvee_y \sim[P(x,y,x)]\}$,
b) $\bigwedge_z\bigvee_x$(z kocha x-a) $\rightarrow \bigvee_x\bigwedge_z$(x jest kochany przez z-a)
c) $\sim [P(x,y,z)] \equiv \bigwedge_y|S(x) \wedge \bigwedge_x\{S(x,z) \wedge \bigwedge_z[S(x,z,z)]\}|$,
d) $\bigwedge_x|R(x) \wedge \bigvee_x\{S(x) \rightarrow \bigwedge_x[P(x)]\}|$,
e) $\bigvee_z|P(z,y) \vee \bigwedge_y\{S(x,y) \equiv \bigvee_x[S(x,z)]\}| \vee \sim\bigwedge_z[R(z,y)]$,
f) $\bigvee_x\{$(x jest bratem y-a) $\rightarrow \bigvee_z[$(z jest matką x-a) $\wedge$ (z jest matką y-a)$]\}$.

8. Wykaż, że następujące wyrażenia są formułami zdaniowymi rachunku predykatów:
a) $\bigwedge_x[P(x)] \equiv \bigvee_y[P(y)]$,
b) $\bigvee_y\{\sim[P(x)] \wedge \sim[R(y)] \rightarrow \bigwedge_z\bigwedge_x\{R(x) \vee \sim[P(z)]\}$,
c) $\sim|\bigwedge_x|\sim\{S(x) \vee \sim[S(x)]\}| \wedge \{\bigvee_x[S(x)] \vee \sim\bigvee_x\sim[S(x)]\}|$,
d) $\sim\{R(x) \vee \bigvee_y[R(y)]\} \equiv \bigwedge_x\{\sim[R(x)] \vee \sim\bigvee_z \sim[P(x,y)]$,
e) $|\bigwedge_x[P(x,y) \wedge \bigwedge_y \{\sim \bigwedge_z[P(y,z)]\}| \vee \sim\bigvee_x[P(y,y)]$,
f) $\bigvee_x\bigvee_y\bigvee_z\{\sim \sim \sim[P(x)\} \rightarrow \{\bigwedge_x[P(x) \equiv \sim\bigwedge_z[P(y)]\}$,

9. Przekształć te z poniższych wyrażeń, które są zdaniami języka polskiego na zdania rachunku predykatów, a te, które są zdaniami rachunku predykatów na zdania jeżyka polskiego:
a) Każdy, kto zdawał egzamin z prawa cywilnego, zdawał też egzamin z logiki,
b) $P(a) \rightarrow \bigvee_x[R(x,a)]$,
c) Nikt nie był w Honolulu,
d) $\bigwedge_x\bigwedge_y[P(x,y)] \rightarrow \bigvee_x\bigvee_y[P(x,y)]$,
e) Nie istnieje nikt taki, kto by rozmawiał z Mieszkiem I i walczył pod Grunwaldem, i widział każdego husarza polskiego,
f) $\bigvee_x\{[S(x,a) \wedge S(x,b)] \equiv \bigvee_y[R(y,a) \wedge R(y,b) \wedge R(y,x)]\}$.

10. Wskaż, jakie tezy rachunku predykatów egzemplifikowane są przez następujące zdania języka polskiego:
a) Jeżeli istnieje taki student prawa, który umie grać na trąbce i umie tańczyć walca, to istnieje taki student prawa, który umie grać na trąbce i istnieje taki student prawa, który umie tańczyć walca,
b) Jeżeli każdy student prawa zdaje egzamin z logiki wtedy i tylko wtedy, gdy studiuje na pierwszym roku, to każdy student prawa zdaje egzamin z logiki wtedy i tylko wtedy, gdy każdy student prawa studiuje na pierwszym roku, **[69/70]**
c) Nie istnieje taki student prawa, który był na Marsie wtedy i tylko wtedy, gdy żaden student prawa nie był na Marsie,
d) Nie jest tak, że każdy student prawa zdaje egzamin poprawkowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki student prawa, który nie zdaje egzaminuj poprawkowego,
e) Istnieje taki student prawa, który interesuje się logiką wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że żaden student prawa nie interesuje się logiką,
f) Każdy student prawa ma maturę i ma prawo jazdy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy student prawa ma maturę i każdy student prawa ma prawo jazdy. **[70/71]**